La idea de transposición didáctica ha supuesto en los últimos años un proceso de clarificación renovadora. Como muestra esta obra con toda precisión, el saber que se enseña en la escuela procede de una modificación cualitativa del saber académico, el cual llega a desnaturalizarse con el fin de que sea comprendido por el alumno. Partiendo de esta idea, fecunda y creativa, Yves Chevallard, Profesor de los Institutos Universitarios de Formación de profesores e Investigación Matemática de la Universidad de Aix Marseille, presenta en este trabajo la formulación originaria y sistemática del concepto de transposición, que supone un debate en torno a la didáctica general y sienta una sólida base para el desarrollo de las didácticas específicas, situando estas últimas en el marco de los estudios cognitivos.
Partiendo de algunos problemas de la enseñanza de las matemáticas, Yves Chevallard realiza finalmente una contribución a los problemas de la docencia de las distintas materias escolares, recuperando la importancia de los contenidos disciplinares para la educación. Suele entrelazar, con coraje intelectual y agudeza iconoclasta, aportes teóricos significativos de nuestra época, logrando una obra que sin duda es un punto básico de referencia en la didáctica de fin de siglo.

ISBN 950-701-380-6

Cód: 1380

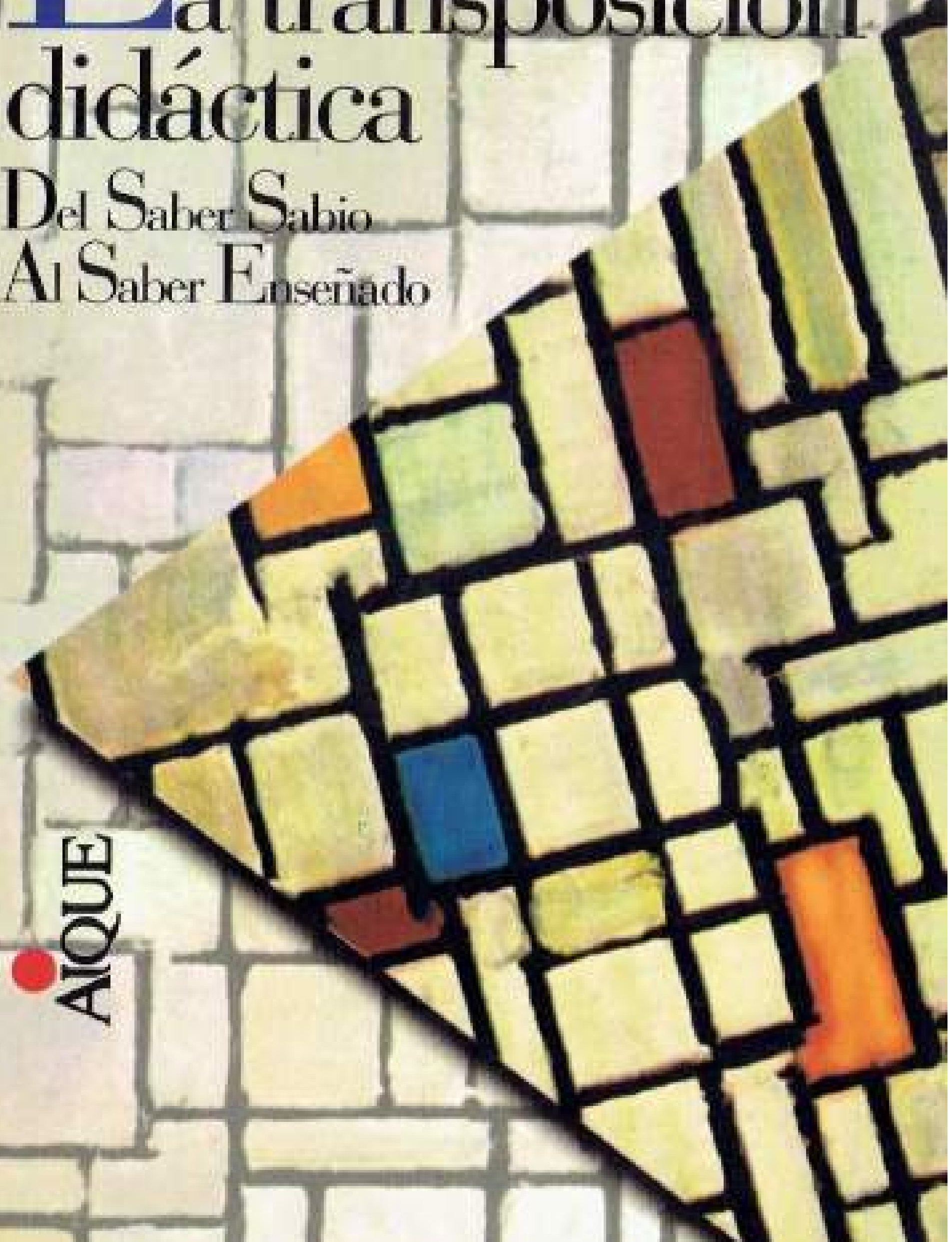
Diseño de cubierta Gustavo Macri

Yves Chevallard La transposición didáctica

AIQUE

La transposición didáctica

Del Saber Sabio Al Saber Enseñado



AIQUE

Yves Chevallard

LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA

Del saber sabio al saber enseñado

LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA

Del saber sabio al saber enseñado

Yves Chevallard

Colección dirigida por Mario Carretero,
Catedrático de Psicología Cognitiva
de la Universidad Autónoma de Madrid

AIQUE

Traducción:
Claudia Gilman
Título original:
La transposition didactique. Du savoir savant
au savoir enseigné

Valentín Gómez 3530 (C1191AAP) Ciudad de Buenos Aires
Tel. / Fax: 4865-5000
e-mail: aique@comnet.com.ar / http://www.aique.com.ar

Hecho el depósito que previene la ley 11.723
LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
I.S.B.N. 950-701-380-6
Primera edición 1997
Segunda edición 1997
Tercera edición 1998
Tercera edición. Primera reimpresión 2000

Índice

Prefacio
a la segunda edición

La primera edición de esta obra apareció en 1985. En esta segunda edición, se ha conservado íntegramente el texto inicial, pero el libro que se propone al lector actual incluye importantes agregados.

La edición de 1985 reunía dos producciones de épocas diferentes: notas redactadas en 1980 como preparación para un curso dado en el marco de la Primera Escuela de Verano de didáctica de las matemáticas, y que constituían el núcleo del libro (los capítulos 1 a 8); la adaptación del texto –que llevaba el título *¿Por qué la transposición didáctica?*, redactado en 1982–, que constituía la introducción de una comunicación presentada en el Seminario de didáctica y de pedagogía de las matemáticas de la Universidad científica y médica de Grenoble.

La presente edición se consagra en mayor medida aún a esa tarea de apilamiento de textos, cosa que no desagrada al autor. Porque el "texto del saber" nunca es otra cosa que una colección de piezas y fragmentos cosidos más o menos prolijamente. No parece inadecuado, incluso, mostrar aquí las costuras: de ese modo, el medio será un poco, y a su manera, el mensaje.

A pesar del progreso de las investigaciones y la evolución de la teoría, no abjuramos del texto original: nos parece justificado conservar una construcción que provee, creemos, los principios esenciales de la problematización y de la comprensión de nuestro tema. Sin embargo, ese texto ha sido doblemente completado: por un lado, se le agrega un estudio de caso y por otro, un análisis de la verdadera extensión y del alcance real de la teoría de la transposición didáctica, tal como se la puede considerar actualmente*.

* N. del E. Este estudio de caso no aparece en esta versión española.

El estudio de caso –que lleva como título *Un ejemplo de análisis de la transposición didáctica* y como subtítulo *La noción de distancia*– se presenta como una monografía. La noción de distancia se había tomado como un ejemplo entre otros, en el curso de 1980. (Encontraremos referencias a ese ejemplo en el capítulo 1, en las líneas que conforman el parágrafo 1.5) Entre mis interlocutores, sin embargo, hubo algunos que, molestos por el tono apodíctico de la exposición, solicitaron algunas aclaraciones. En los meses siguientes, y gracias a la invalorable colaboración de mi colega de la Universidad de Provence, Marie-Alberte Johsua, se elaboró la ampliación requerida. El texto apareció en 1982 en la revista *Recherches en didactique des mathématiques*. La encontraremos aquí prácticamente completa excepto por la supresión del aparato de resúmenes en diversas lenguas que exigía originalmente.

Al leerlo, debe recordarse que ese texto ha sido escrito y publicado en momentos en que el núcleo de la obra –las notas preparatorias al curso de 1980, publicadas en 1985– no había llegado a conocimiento del público. Así se explica que encontremos aquí algunas repeticiones, que en ese entonces no eran tales, y que darán testimonio, según pensamos, de la pertinencia de la materia a la que se refieren. Lo que no justifica, sin embargo, a esos comentadores que, apresurándose demasiado para ejercer su espíritu crítico, nos reprocharon públicamente que sucumbiéramos a la tentación teoricista de haber escrito, según creen ellos, el libro *publicado* en 1985 *después* del estudio aparecido en 1982 [1].

Perdónesenos el recuerdo de esas minucias anecdóticas. Pero no sucumbamos a nuestra vez al afán de disputa cuando en realidad se trata solamente de alejarse de él; y pasemos a comentar el segundo agregado anunciado, que adopta ahora la forma de un posfacio sustancial. (Agreguemos de todos modos y en carácter de balance final de todas las cuentas pendientes, que el texto, en su parte esencial, estaba redactado desde julio de 1990...) Indudablemente, en el curso de estos últimos años, la teoría de la transposición didáctica sin duda fue objeto de diversas transposiciones institucionales y hubo buenos observadores que se creyeron con derecho a considerarlas ambiguas dado que podían parecer oportunas, cuando no francamente oportunistas.

¡Así transcurre la vida social de los saberes! Pero más que para distribuir sumariamente sanciones y alabanzas, me pareció que el momento y el lugar eran propicios para articular algunas cuestiones vitales que hasta ahora, creo, hemos ignorado más de la cuenta. En especial la de la "verdadera naturaleza" de las didácticas; también la de la existencia, reivindicada aquí y rechazada allá, de este incierto epónimo, *la* didáctica... Interrogación "existencial" que me parece se impone en lo sucesivo. Porque no se entra, sin mengua de la propia identidad, en el universo controlado de los saberes reconocidos. Porque el surgimiento a la existencia de un nuevo saber nunca es algo obvio. Y porque hemos dejado atrás la época del incógnito epistemológico, en el que los didactas han vivido tanto tiempo.

Y.C.
Marzo de 1991

Estructura del sistema educativo francés

N del E. El autor hace referencia en varias oportunidades a distintos cursos del sistema educativo francés. Para favorecer la comprensión del lector, se incluye una breve reseña de la estructura de dicho sistema. Obsérvese que en el texto se ha mantenido el indicativo ordinal (tercer curso, etc.) empleado por el autor, que no se suele corresponder con la denominación empleada en otros países. Por ejemplo, *Troisième* equivale a segundo año del secundario (14-15 años).
El sistema escolar francés se divide en tres instituciones:

Le primaire
1) CP (*Cours préparatoire*) que equivale a 1º grado (6-7 años)
2) CE1 (*Cours élémentaire 1*) que equivale a 2º grado (7-8 años)
3) CE2 (*Cours élémentaire 2*) que equivale a 3º grado (8-9 años)
4) CM1 (*Cours moyen 1*) que equivale a 4º grado (9-10 años)
5) CM2 (*Cours moyen 2*) que equivale a 5º grado (10-11 años)

Le collège
Sixième (sexto curso) (11-12 años)
Cinquième (quinto curso) (12-13 años)
Cuatrième (cuarto curso) (13-14 años)
Troisième (tercer curso) (14-15 años)
Al término del *collège* se rinde un examen: el *Brevet*.

Le lycée
Seconde (15-16 años)
Première (16-17 años)
Terminale (17-18 años)

Los dos últimos años del *Lycée, Première* y *Terminale*, son los que corresponden a la especialización a partir de la cual los alumnos pueden orientarse con respecto a sus carreras futuras. Las orientaciones varían según los establecimientos, pero las principales son: Ciencias, Economía y Letras, con sus respectivas subespecializaciones.
Al término de la *Terminale* se rinde el *Baccalauréat*, examen que condiciona la obtención del título.

¿Por qué la transposición didáctica?

El texto que se encuentra a continuación, bajo el título "La transposición didáctica: del saber sabio* al saber enseñado", está constituido, salvo algunos retoques puntuales, por notas preparatorias a un curso que dicté en ocasión de la Primera Escuela de Verano de didáctica de las matemáticas, llevada a cabo en Chamrousse del 7 al 19 de julio de 1980. Lleva la marca –que no he procurado disimular– de esa circunstancia. Ese "curso" (puesto que de eso se trata) se presenta bajo una forma deliberadamente didáctica y sin ornamentos, no por voluntad de imposición sino por el contrario, con la intención de delimitar claramente los puntos de anclaje –aquellos que, en todo caso, el autor podía proponer en aquel entonces– de un trabajo ulterior de rectificación, de profundización, de extensión, etc.; con la intención, por lo tanto, de abrir la perspectiva de un debate científico sobre el tema tratado.

Ese tema –la transposición didáctica–, que era entonces un tema nuevo, tuvo un poder de seducción indudable. Seducción no desprovista de ambigüedad, sin duda, y en muchos casos afectada por ambivalencias. El destino epistemológico del concepto ha trazado hasta aquí itinerarios múltiples pero ordinarios. Fue objeto de exposiciones de seminarios y sobre todo de un cierto número de trabajos que presentaban análisis didácticos precisos: ése era su origen; ése es, de hecho, su justo lugar.[1] Lo que es aún más notable es que el concepto se difundió más allá de la comunidad de didactas de las matemáticas: lo reencontramos hoy en didáctica de la física [2] o incluso entre quienes cumplen una función

* N. del E. A lo largo de este libro, y por pedido expreso del autor, hemos respetado con total fidelidad la locución francesa *savoir savant*, traduciendo en todos los casos *saber sabio*. Sin embargo, con el fin de acercarnos a los usos corrientes del español, hemos utilizado el término *académico* para traducir *savant*, al referirnos al ámbito de producción de este saber, a las prácticas relacionadas y a los investigadores y productores de este conocimiento.

de intervención en el sistema de educación (parece que ha habido una cierta circulación de la noción, especialmente en el seno de los IREM*). Pero más allá de las modalidades de la recepción del concepto, es necesario preguntarse sobre las condiciones de su instalación en los discursos y de su puesta en funcionamiento en la práctica.

Para ello conviene partir de muy lejos: de la posibilidad misma de la existencia de una ciencia que llamamos *la didáctica de las matemáticas*. Toda ciencia debe asumir, como primera condición, pretenderse ciencia de un *objeto*, de un objeto real, cuya existencia es independiente de la mirada que lo transformará en un objeto de conocimiento. Es la posición materialista mínima. En ese mismo movimiento, es preciso suponer en ese objeto un *determinismo* propio, "una *necesidad* que la ciencia querrá descubrir".[3] Pero eso,—que vale tanto para el psicoanálisis, por ejemplo, como para la física— no es obvio cuando nos encontramos con ese "objeto" que pretendemos tan particular, como el *sistema didáctico* o, más ampliamente, el sistema de enseñanza.[4] Lejos de considerarlo espontáneamente como dotado de un determinismo específico que se trataría entonces de desentrañar, no le concedemos comúnmente sino una voluntad débil, enteramente sometida a nuestro libre arbitrio de sujetos deseantes. Y en lo que de él se nos resiste queremos ver el simple efecto de la *mala* voluntad de algunos *malos* sujetos (los docentes, dramáticamente conformistas, la administración, insoportablemente burocrática, los "sucesivos gobiernos", el ministro, etc.) Cualquiera sea el fundamento sociohistórico de una actitud tan unánime (que el investigador no puede contentarse con condenar simplemente porque le molesta, puesto que en ese caso incurriría en la misma falta que pretendería denunciar), es preciso advertir, sin embargo, que en este sentido nos encontramos

* N. del T. Se trata de las siglas correspondientes a los Institutos de Investigación de la Enseñanza de la Matemática.

en una situación verdaderamente *precientífica*. Ha sido necesario, como muestra L. Althusser, esperar a Montesquieu para que empezáramos a tomar en serio —epistemológicamente— el sistema *político*, es decir, para que le reconociéramos la consistencia de una necesidad decisiva, para que abriéramos los ojos a la existencia de un "espíritu" de las Leyes, que manifiesta su eficacia más allá de nuestras razonables prescripciones, nuestros ridículos voluntarismos, nuestro vano sentimiento de poderío doctrinario sobre la cosa pública. Y a pesar de eso, ¿hay necesidad de recordarlo? toda una parte del siglo XVIII vivió en la duradera ilusión de que podían existir "déspotas ilustrados", personajes imaginarios, si los hubo, hasta que Federico y Catalina* se encargaron de demostrar hasta qué punto esta expectativa era irreal. ¿Acaso hemos progresado mucho sobre ese punto? Es posible que con el tiempo y tras algunos desencantos, hayamos llegado hace poco a manejarnos con un poco más de prudencia en los discursos.

El contraste se vuelve todavía más vivo cuando fijamos nuestra atención en el sistema educativo. Porque, debemos reconocerlo, éste sigue siendo territorio favorito de todos los voluntarismos, para los que constituye, tal vez, el último refugio. Hoy más que ayer, ese sistema debe soportar el peso de las expectativas, los fantasmas, las exigencias de toda una sociedad para la que la educación es la última reserva de sueños a la que desearíamos poder exigirle todo.[5] Esta actitud es una confesión: el sistema educativo, enteramente colmado de voluntad humana, podría moldearse según la forma de nuestros deseos, de los cuales no sería sino una proyección, en la materia inerte de una institución. Añadiríamos incluso qué es lo qué hemos hecho de él y, al fin de cuentas, encontramos en él lo que hemos puesto en él. Pero la cuestión, aquí, va mucho más lejos. Esta fe ingenua se explicita, desde hace más de veinte años, en un credo singular: el de la "investigación-ac-

* N. del T. El autor se refiere a Federico de Prusia y Catalina de Rusia.

ción". Bajo este curioso vocablo se oculta algo muy diferente de un estilo particular de investigación, que desearía legitimarse en tanto dialéctica renovada entre *episteme* y *techné*. Allí se instala, enmascarada, toda una epistemología, o mejor dicho, toda una ideología del conocimiento que, sin embargo, entre sus más rigurosos defensores, se revela como lo que realmente es: un espiritualismo humanista que duda de la realidad misma de lo que se pretende aquí "estudiar-transformar", y proclama, de manera coherente con su confesión antimaterialista, la llegada de un "nuevo paradigma científico".[6] ¡Nada menos! El mundo –o más bien esta miniatura: el sistema educativo–, dado que es una obra humana, conscientemente ordenada hacia un fin reconocido, no sería más que el fruto de nuestras voluntades y de nuestros caprichos. De nuestras voluntades, ciertamente, a veces insostenibles; de nuestros caprichos, con frecuencia egoístas, que deberíamos reencaminar. Deberíamos trabajar precisamente para eso. Todo el misterio de esa mecánica que habríamos creado se agotaría en una tensión de voluntades –buenas y malas– y se trabajaría mediante un juego de fuerzas reducido a semejante maniqueísmo.

Obviamente, este es un punto de vista al que la didáctica de las matemáticas está obligada a oponerse: con ello se juega fundamentalmente su inscripción misma en el campo del conocimiento científico. Su postulado y, digamos incluso, su acto de fe, a partir del cual se ordena la perspectiva de sus esfuerzos, es que existe un objeto preexistente e independiente respecto de nuestras intenciones y dotado de una necesidad, de un determinismo propios; un objeto por lo tanto *cognoscible*, en el sentido en el que la actividad científica, en todas las áreas en que se ha desplegado hasta ahora, pretende conocer el mundo. Ese objeto—allí está el obstáculo con el que la investigación-acción tropieza– no es enteramente del orden de la naturaleza. Es lo que yo denominaría un objeto

tecnocultural, cuya formación se inscribe en la historia (en cuanto a algunos de sus rasgos, se trata de una historia relativamente reciente: cuanto más, tres siglos). Y, al igual que hay un "espíritu" de las Leyes, hay un "espíritu" de nuestro objeto, que nos corresponde explicar.

Pero ¿cuál es en realidad ese objeto? El didacta de las matemáticas se interesa en el juego que se realiza –tal como lo puede observar, y luego reconstruir, en nuestras clases concretas– entre un *docente*, los *alumnos* y un *saber matemático*. Tres lugares, pues: es el *sistema didáctico*. Una relación ternaria: es la relación didáctica. Esta es la base del esquema por el cual la didáctica de las matemáticas puede emprender, por tanto, la tarea de pensar su objeto. Sin duda, parece un esquematismo tosco pero tiene la virtud principal de poner a distancia las perspectivas parciales en las que se ha buscado durante demasiado tiempo y vanamente una explicación satisfactoria de los hechos mejor comprobados: tal como la demasiado famosa "relación enseñante-enseñado" que ha oscurecido, durante al menos dos décadas, el estudio de los hechos didácticos más inmediatamente transparentes. Esquema polémico que funciona rectificando un error mantenido por demasiado tiempo. Pero una vez planteado esto, es decir, una vez que se torna posible hablar de ese tercer término, tan curiosamente olvidado: el saber, puede formularse una pregunta que otorga a la polémica su verdadero interés: ¿qué es entonces aquello que, en el sistema didáctico, se coloca bajo el estandarte del Saber? El "saber enseñado" que concretamente encuentra el observador, ¿qué relación entabla con lo que se proclama de él fuera de ese ámbito? ¿Y qué relación entabla entonces con el "saber sabio", el de los matemáticos? ¿Qué distancias existen entre unos y otros?

Estas preguntas mínimas, empero, tocan un punto sumamente importante: génesis, filiaciones, legitimidades, todo esto mezclado y en forma de debate. ¿Génesis míticas? ¿Filiaciones negociadas? ¿Legitimidades inciertas? El cuestionamiento, es verdad, comienza por adoptar un sesgo de sospecha: la investigación epistemológica se torna así fácilmente policíaca y parece *a priori* hostil al funcionamiento *feliz* de la institución. El concepto de transposición didáctica, en tanto remite al paso del saber sabio al saber enseñado, y por lo tanto a la distancia eventual, obligatoria que los separa, da testimonio de ese cuestionamiento necesario, al tiempo que se convierte en su primera herramienta. Para el didacta, es una herramienta que permite recapacitar, tomar distancia, interrogar las evidencias, poner en cuestión las ideas simples, desprenderse de la familiaridad engañosa de su objeto de estudio. En una palabra, lo que le permite ejercer su vigilancia epistemológica. Es uno de los instrumentos de la *ruptura* que la didáctica debe ejercer para constituirse en su propio dominio; es aquel por el cual la entrada del saber en la problemática de la didáctica pasa de la potencia al acto: en la medida en que el "saber" deviene para ella *problemático* puede figurar, en adelante, como un término en el enunciado de problemas (nuevos o simplemente reformulados) y en su solución.

Pero para el docente las cosas ocurren de otro modo. En un primer momento, al menos, el reconocimiento de la transposición didáctica supone resquebrajar su participación armoniosa en el funcionamiento didáctico. El sistema didáctico no es el efecto de nuestra voluntad. Su funcionamiento —sin hablar siquiera todavía de su *buen* funcionamiento— supone que la "materia" (enseñante, alumnos, saber) que vendrá a ocupar cada uno de los lugares, satisfaga ciertos *requisitos didácticos* específicos. Para que la enseñanza de un determinado elemento de saber sea meramente *posible*, ese elemento deberá haber sufrido ciertas deformaciones, que lo harán apto para ser enseñado. El saber-tal-como-es-enseñado, el saber enseñado, es necesariamente distinto del saber-inicialmente-designado-como-el-que-debe-ser-enseñado, el saber a enseñar. Este es el terrible secreto que el concepto de transposición didáctica pone en peligro. No basta sólo con que se profundice una brecha: es preciso que esa brecha necesaria sea *negada* y excluida de las conciencias como problema, si subsiste tal vez como hecho contingente. Puesto que, al mismo tiempo, para que la enseñanza dada aparezca legitimada, es preciso que afirme fervorosamente su adecuación con el proyecto que la justifica y que la explicita. El saber enseñado debe aparecer conforme al saber *a enseñar*. O mejor, la cuestión de su adecuación, *no debe ser formulada*. Ficción de identidad o de conformidad aceptable. El enseñante no existe, porque la enseñanza no existe sino al precio de esta ficción: ésta vive de esa ficción, debe vivir de esa ficción. Por lo tanto, señalando un proceso que constituye el objeto de una negación tan vital, el concepto de transposición didáctica se afirma primero como violencia ejercida contra la integridad del acto de enseñanza, cuya identidad desdibuja en una interrogación a la que el docente no puede responder *a priori* sino negándose a escucharla.

Resistencia al concepto. El concepto, y la resistencia con la que se encuentra, hacen visible otra verdad del funcionamiento didáctico: no se comprende lo que ocurre en el interior del sistema didáctico si no se toma en cuenta *su exterior*. El sistema didáctico es un sistema *abierto*. Su supervivencia supone su *compatibilización* con su medio. Esta le impone responder a las exigencias que acompañan y justifican el proyecto social a cuya actualización debe responder. Hay allí, empero, una especie de paradoja: su respuesta consiste precisamente en no prestar atención a la cuestión. La ficción de conformidad se instala y perdura debido a que el saber a enseñar (y el saber sabio de donde éste deriva por designación) se en-

La transposición didáctica

cuentra rápidamente olvidado en el curso del proceso de transposición, en tanto que punto de partida, objeto de referencia, fuente de normatividad y fundamento de legitimidad. Comúnmente (es decir, fuera de los períodos de "crisis") permanece ajeno al campo de conciencia del enseñante como tal: la conciencia didáctica es cerrada *porque el sistema didáctico es abierto*. La clausura de la conciencia didáctica responde subjetivamente a la autonomía *relativa* del sistema didáctico; es la forma vivida de la condición de posibilidad de la enseñanza. ¡El sistema didáctico no existe sino para ser compatible con su entorno; y esta compatibilización pasa por una disminución de la conciencia del entorno por parte de los agentes del sistema! El destino del saber se juega en esta astucia del funcionamiento didáctico. Con respecto a él, sería inadecuado hablar de génesis y filiaciones, de rupturas y reformulaciones. Pues supondría dar cabida legítima a una cuestión que no puede sostenerse. El saber que produce la transposición didáctica será por lo tanto un saber exiliado de sus orígenes y separado de su producción histórica en la esfera del saber sabio, legitimándose, en tanto saber enseñado, como algo que no es de ningún tiempo ni de ningún lugar, y no legitimándose mediante el recurso a la autoridad de un productor, cualquiera que fuere. "Pueden creerme", parece decir el docente, para afirmar su rol de transmisor, que no puede transmitir sino bajo la condición de no producir nada, "pueden creerme porque no se trata de mí..." Aversión de los manuales hacia todo lo que anclaría en una historia el saber que ellos promueven. Lo que ha sido y ya no es, no existe siquiera en el recuerdo: ése es el secreto del funcionamiento *sin historia* de la institución. El saber enseñado supone un proceso de naturalización, que le confiere la evidencia incontestable de las cosas naturales; sobre esta naturaleza "dada", la escuela espera ahora su jurisdicción, fundadora de valores que, en adelante, administran el orden didáctico.

Resistir no es rechazar. No siempre. Existe el rechazo del que no quiere escuchar. Existe el rechazo ultrajado de quien protesta: se denunciará entonces el *exceso* del análisis, que se juzgará exagerado y ofensivo para el simple sentido común —eterno aliado de todas las malas causas. Nos escandalizaremos de la afrenta lanzada contra el orden y los valores del mundo —quiero decir, de la institución. así el trabajo científico está hecho de minúsculas revoluciones copernicanas, que son a su vez pequeños escándalos. Es verdad, mientras tanto, que los primeros usos de un concepto se consideran frecuentemente como casos "patológicos", porque se trata de forzar las características con el propósito de ver o hacer ver. De modo que la pertinencia del concepto, su utilidad o su necesidad, aparecen ligados a casos límites y parecen no incluir más que lo aberrante o lo monstruoso. Si, pasando del hecho al derecho, consideramos esos casos como los únicos a los que se aplica con justicia el concepto, también consideraremos exagerado e ilegítimo el uso *sistemático* del concepto —esta ley de hierro del trabajo científico. (Aun en la década de 1920, el hombre común podía llegar a aceptar que la represión, concepto freudiano, se aplicara a los locos, pero objetaba que era falso querer someter a él a las personas de bien.) Sin embargo, lo sabemos, la "resistencia" también puede invertir su curso, hacerse aceptación entusiasta, proselitismo ofensivo, ardor por propagar la "verdad", y así es como se corrigen las equivocaciones. Entonces, a la inversa, se asignará al concepto el territorio más vasto, la legitimidad más extensa; y, en el mismo movimiento, se creerá obligatorio asignar a lo patológico, que el concepto contribuyó primero a explicar, una extensión máxima. (Así es como el hombre común cultivado de nuestros días, henchido de psicoanálisis, proclamará que "todos somos neuróticos"). Existe una relación arcaica con el saber de la que sin duda no nos desharemos jamás completamente. Emocionalmente, vivimos toda conquista de la verdad como reparación de una privación inmemorial, como una victoria obtenida, no sobre la ignorancia —que en definitiva es una cuestión de la que somos responsables—, sino sobre cierta voluntad de secreto, venida de nadie sabe dónde pero evidente por su mismo misterio.

Rechazo irritado, aceptación generosa: son las dos vertientes de una misma emoción. En apariencia, también puede prevalecer otro tono, caracterizado por una cierta sangre fría, un laconismo en la confesión que deja poco espacio al debate. Dos reacciones, de las que puedo hacerme eco aquí, completan e ilustran los análisis precedentes. El "concepto" será, en apariencia, fríamente admitido, como si fuera obvio. Simplemente se considera que un día se ha agregado una nueva palabra a las palabras de la tribu. Simple agregado que no altera la anterior economía del léxico. La "teoría" desempeña ahora el papel de homeostato. Operación de banalización, donde el concepto está vaciado, pierde su fuerza y, puesto a funcionar en los enunciados más nimios, carece finalmente de objeto propio. En todo caso, sólo se impone el significante; es sólo el vocabulario lo que ha cambiado. Es verdad, se dirá, es verdad que hay transposición didáctica: ¡organicemos pues esas transposiciones didácticas! El activismo obstruye el análisis y una cierta actitud reflexiva. Preparar una lección sobre el logaritmo se vuelve, entonces, *hacer* la transposición didáctica de la noción de logaritmo. Sin embargo, preparar un lección es sin duda trabajar con la transposición didáctica (o más bien, *en* la transposición didáctica); jamás es *hacer* la transposición didáctica. Cuando el enseñante interviene para escribir esta variante local del texto del saber que él llama *su curso*, o para *preparar su curso* (es decir, para realizar el texto del saber en el desfiladero de su propia palabra), ya hace tiempo que la transposición didáctica ha comenzado... De hecho, el debate no es en este caso más que aparentemente un debate técnico (¿Qué extensión conviene dar al proceso de transposición didáctica? ¿Hay que segmentarlo? Y en ese caso ¿qué segmentación hay que mantener?). Bajo la apariencia de una elección teórica, el enseñante no elige, porque no tiene poder de elección. Retiene del proceso el único momento en el que se sabe involucrado: la redacción del texto del saber —el cual, previamente, en la etapa de la redacción (realizada bajo la forma del manual o de notas del profesor) no es más que un "metatexto", que no está escrito definitivamente en ninguna parte, que es una matriz de variantes que le darán forma concreta. Mediante esta cómoda ignorancia, el enseñante aniquila las fases del proceso que no sabe gobernar (y que, de hecho, gobiernan su "elección"). Y ese movimiento de clausura de su campo de conciencia le permite sostener la ficción de la transparencia vivida —actuada— del funcionamiento didáctico (es decir, de lo que percibe de éste), y de su capacidad de asumir su control a partir de las únicas variables directrices de las que dispone —en primer lugar, el juego sobre el texto del saber.

Pero también puede verse otra reacción, que en verdad no me esperaba, proveniente de otro campo, el de los didactas. "De acuerdo", dijeron algunos de ellos, "hay transposición didáctica"; y —también "de acuerdo"— hay que analizar ese proceso (ya no se trataba aquí, por el momento, y en contraste con la preocupación inmediata de los profesores, de "fabricar" transposiciones didácticas). ¿Pero por qué hacer partir el análisis del análisis del saber sabio? Aquello que esbocé a propósito de la resistencia al concepto permite, creo, aclarar esta sorprendente respuesta. La exclusión del saber sabio, que hace posible el desfase temporal e institucional que separa el saber sabio y sus avatares didácticos por parte del proceso de transposición, es aquello por lo cual el orden didáctico se constituye como cerrado sobre sí mismo. Este modelo en pequeño que desearíamos ver sometido a nuestra única legislación, manifiesto unicamente ante nuestra mirada, adopta aquí su autonomía en la conciencia para alejarse de lo que, en última instancia, funda su legitimidad. La afirmación del desinterés del análisis del saber sabio –arrojado así enteramente y sin pena a la historia y a la epistemología de las matemáticas– manifiesta la infiltración, en la problemática del didacta, de los valores que organizan el punto de vista del docente. Nunca se insistirá demasiado al decir que la ruptura por la que se abre un nuevo espacio científico –el de la didáctica de las matemáticas, como espacio no reductible a los diversos territorios ya delimitados (los de la psicología, la sociología, etc.)– es una ruptura continuada, una operación reiterada, que reencontramos en cada uno de nuestros gestos. Hijo pródigo, el didacta se siente permanentemente tentado de volver a la Morada del Padre y teme involucrarse con la problemática del enseñante. Más de una vez cae presa de la acuciante nostalgia del *alma mater*, de la que un día se apartó porque se le hizo necesaria una cierta distancia epistemológica y axiológica para poder reencontrarla finalmente de otra manera –para poder hacerse didacta.

En sentido restringido, la transposición didáctica designa pues el paso del saber sabio al saber enseñado. Pero la especificidad del tratamiento didáctico del saber puede comprenderse mejor a través de la confrontación de los dos términos, de la distancia que los separa, más allá de lo que los acerca e impone confrontarlos. En verdad, el "olvido" del saber sabio no oscurece en absoluto el desarrollo atento del análisis del saber enseñado: no es más que el primer tiempo de la sustitución, en el análisis del saber enseñado, del análisis del saber sabio, en la ilusión reencontrada de una identidad feliz entre ambos. El distanciamiento ostentoso del saber

sabio, suprimiendo uno de los términos del problema planteado, borra el problema y prepara el retorno subrepticio y obcecado de la ficción unitaria que el concepto de transposición didáctica denuncia a través de la separación que señala tercamente en el interior régimen del "saber". Por el contrario, cuando se le asigna al saber sabio su justo lugar en el proceso de transposición y, sin que el análisis de la transposición didáctica sustituya indebidamente al análisis epistemológico *stricto sensu*, se hace evidente que es precisamente el concepto de transposición didáctica lo que permite la articulación del análisis epistemológico con el análisis didáctico, y se convierte entonces en guía del buen uso de la epistemología para la didáctica. De ese modo, los epistemólogos nos aportan el concepto de problemática. Pero éste se revela un arma muy útil para nuestro propósito: en el paso de tal elemento del saber sabio al elemento que le responde –o mejor, del cual él responde– en el saber enseñado, hay antes de nada un invariante (en general un significante: "conjunto", "distancia", etc.) y hay una variación, una separación, que constituye toda la diferencia y que el examen de las problemáticas respectivas –la problemática del elemento de saber en el saber sabio, la problemática del elemento de saber puesto en correspondencia con el saber enseñado– hará surgir inevitablemente. El ejemplo de la reforma de las matemáticas modernas constituye un caso excepcional para desarrollar este tipo de investigaciónes. Con mucha frecuencia, el saber enseñado se encontró profundamente modificado, en pocos años, y hubo que transponer una inmensa cantidad de elementos tomados del saber sabio (de las matemáticas de los matemáticos). Sin embargo, contrariamente a ciertos casos de transposición, que el especialista de la disciplina identifica con facilidad ya que proceden brutalmente de una descontextualización de los significantes (seguida de su recontextualización en un discurso diferente), las numerosas transferencias llevadas a cabo por la reforma permitieron conservar segmentos lo suficientemente amplios del discurso sabio como para desviar la atención de los matemáticos que apadrinaban la operación. Pero, si el contexto "discursivo" era de ese modo parcialmente conservado, en relación con otro contexto, la descontextualización efectivamente operada se volvía poco identificable y no se identificaba como tal porque trascendía el texto del saber, la red *de las problemáticas y de los problemas* en la que el elemento descontextualizado hallaba originalmente sus usos, su empleo, es decir, su sentido. Sabemos que fueron necesarios algunos años para que los matemáticos percibieran este error.

Curiosamente hay que agregar, a los argumentos precedentes, otro de sentido contrario. El saber sabio nos interesa porque ciertas exigencias que intervienen en la preparación didáctica del saber, están ya influyendo a partir de la constitución del saber sabio o al menos a partir de la formulación discursiva de ese saber. Esto ocurre particularmente en el caso de la exigencia de *despersonalización*, a la que indudablemente no hemos otorgado la merecida atención. Todo saber considerado *in statu nascendi* está vinculado a su productor y se encarna en él, por así decirlo. Compartirlo, en el interior de la comunidad académica, supone un cierto grado de despersonalización, que es requisito para la *publicidad* del saber. Se olvida demasiado, por ejemplo, que lo que llamamos hoy la mecánica clásica fue primero el saber personal, casi esotérico, de Isaac Newton, y que fue de las presiones de su entorno que nacieron finalmente los *Principia*. Y sabemos también que Cantor pagó muy caro ese saber tan extrañamente ligado a su persona —hasta la locura— que, menos de un siglo después y furiosamente transpuesto ya era moneda corriente. Sin duda el proceso de despersonalización no se realiza nunca

tan completamente como durante el momento de la enseñanza ("Pueden creerme, porque no es mío..."). Pero comienza indiscutiblemente en la comunidad académica. Asume en ella, es cierto, modalidades y funciones diferentes. Según las condiciones de la exposición del saber, este proceso debe dar lugar primero a la difusión y a partir de allí, a la *producción social* de conocimiento. Más tarde, además, en la intimidad del funcionamiento didáctico, cumplirá una función enteramente diferente: de reproducción y de representación del saber, sin estar sometido a las mismas exigencias de productividad. El juego del saber adopta ahora un aspecto totalmente diferente.

* * *

Hay más de un modo en que un concepto pierde su carácter incisivo. Son los usos que sabemos darle y *que le damos* los que le otorgan su fuerza explicativa, su valencia epistemológica. Un concepto puede gastarse a fuerza de usos incorrectos. No basta, entonces, con plantear que hay transposición didáctica y dejar las cosas en ese punto. Preguntémonos, más bien: "¿Por qué hay transposición didáctica?" La respuesta —"Porque el funcionamiento *didáctico* del saber es distinto del funcionamiento académico, porque hay dos regímenes del saber, interrelacionados pero no superponibles"— hace surgir una nueva pregunta, que permite ampliar la temática del cuestionamiento y profundizar el debate (para ahondar en profundidad es preciso ahondar en amplitud). La transposición didáctica tiene lugar cuando pasan al saber enseñado elementos del saber. ¿Pero por qué son necesarios esos flujos? Comúnmente, el saber enseñado vive muy bien encerrado sobre sí mismo, en una plácida autarquía, protegido por lo que hemos llamado la "clausura de la conciencia didáctica" –este distanciamiento, tan eminentemente funcional, del resto del mundo. Y cuando se lo observa, el funcionamiento didáctico revela incluso una verdadera capacidad de producción de saber a los fines del autoconsumo. Esta *creatividad didáctica* introduce muchas variaciones sobre los grandes motivos de la más alta ascendencia (el único coseno de las matemáticas hace surgir dos, el grande y el pequeño, sin violar en nada la legalidad matemática y con toda legitimidad didáctica). Hasta cierto punto, el funcionamiento didáctico es, pues, capaz de proveer a sus propias necesidades en cuanto al saber que se va a enseñar. ¿Por qué, entonces, un día, en cierto momento de su historia, esta apacible economía debe abrirse a aportes que no son de su elaboración? ¿Por qué ese funcionamiento aparentemente armonioso y sereno llega a entrar en crisis?.

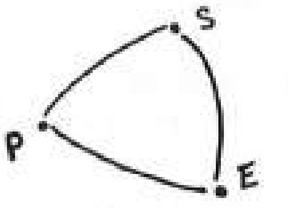


Figura 1

Será útil, para responder a esas preguntas, utilizar un pequeño esquema teórico cuyo provecho no se limita ciertamente al uso que haremos en esta ocasión. Ya me he referido antes al sistema didáctico. Aquí está representado con sus tres lugares (P: el enseñante, E: los alumnos, S: el saber enseñado) y las interrelaciones entre ellos. Es preciso ahora estructurar más finamente lo que denominé su "entorno". Concretamente, los sistemas didácticos son formaciones que aparecen cada año hacia el mes de septiembre*: alrededor de un saber (designado ordinariamente por el programa) se forma un contrato didáctico que toma ese saber como objeto de un proyecto compartido de enseñanza y aprendizaje y que une en un mismo sitio a docentes y alumnos. El entorno inmediato de un sistema didáctico está constituido inicialmente por el *sistema de enseñanza*, que reúne el conjunto de sistemas didácticos y tiene a su lado un conjunto diversificado de dispositivos estructurales que permiten el funcionamiento didáctico y que intervienen en él en diversos niveles. Incluye, por ejemplo, medios multiformes (oficiales y oficiosos) de regulación de los flujos de alumnos entre los sistemas didácticos, asegurando (entre otras funciones) la formación del conjunto de los sistemas didácticos de modo viable. No nos detendremos aquí en esas cuestiones, que se corresponden esencialmente a otras áreas del análisis didáctico, en las que se plantean problemas igualmente profundos (que se refieren precisamente a las condiciones de la constitución viable de los sistemas didácticos tales como las de la heterogeneidad u homogeneidad de las clases). El sistema de enseñanza –la "miniatura" de la que hablé anteriormente– posee a su vez un entorno, que podemos denominar, si lo deseamos, la *sociedad*, la sociedad "laica", por contraste con esa sociedad de expertos que es el sistema de enseñanza/educativo. Ese entorno se caracteriza evidentemente por una estructuración en extremo compleja. Pero, en una primera aproximación, no podemos dejar de introducir en él una especificación muy simple: retendremos de él solamente a los "*padres*" y los *académicos* (los matemáticos) –y luego, por supuesto, la *instancia política*, decisional y ejecutiva (el Ministerio, etc.), es decir el órgano de gobierno del sistema de enseñanza. En este estadio de la descripción, el decorado sólo está parcialmente reconstruido.

* N. del T. En Francia el curso escolar comienza en el mes de septiembre.

La transposición didáctica

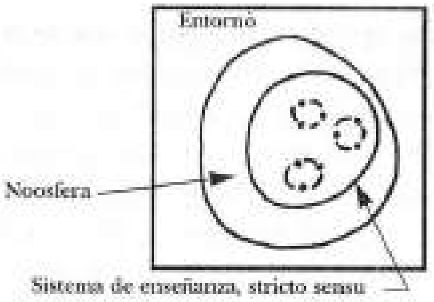


Figura 2

Esto se debe a que, en la periferia del sistema de enseñanza, que denominaremos ahora sistema de enseñanza *stricto sensu* (fig. 2), es preciso dar su lugar a una instancia esencial para el funcionamiento didáctico, suerte de bastidor del sistema de enseñanza y verdadero *tamiz* por donde se opera la interacción entre ese sistema y el entorno societal. Allí se encuentran todos aquellos que, en tanto ocupan los puestos principales del funcionamiento didáctico, se enfrentan con los problemas que surgen del encuentro con la sociedad y sus exigencias; allí se desarrollan los conflictos, allí se llevan a cabo las negociaciones; allí maduran las soluciones. Toda una actividad ordinaria se despliega allí, fuera de los períodos de crisis (en los que ésta se acentúa), bajo la forma de doctrinas propuestas, defendidas y discutidas, de producción y de debates de ideas –sobre lo que podría modificarse y sobre lo que conviene hacer– En resumen, estamos aquí en la esfera *donde se piensa* –según modalidades tal vez muy diferentes– el funcionamiento didáctico. Para esta instancia sugerí el nombre paródico de *noosfera*. En la noosfera, pues, los representantes del sistema de enseñanza, con o sin mandato (desde el presidente de una asociación de enseñantes hasta el simple profesor militante), se encuentran, directa o indirectamente, (a través del libelo denunciador, la demanda conminatoria, el proyecto transaccional o los debates ensordecidos de una comisión ministerial), con los representantes de la sociedad (los

padres de los alumnos, los especialistas de la disciplina que militan en torno de su enseñanza, los emisarios del órgano político).

El esquema delineado es simple; conserva apenas lo esencial con el fin de dar una base amplia al estudio del proceso de transposición didáctica. Un análisis detallado, a propósito de ese ejemplo de transposición, exigiría indudablemente una descripción más fina. Se requeriría hacer justicia a la complejidad de las posiciones diferenciales de los diversos agentes en su intervención en el seno de la noosfera –donde las competencias están delimitadas con precisión, los registros están asignados, las responsabilidades, distribuidas y los poderes, circunscriptos. Ciertamente, un matemático no puede desplegar allí los mismos argumentos que un maestro: puede recordar lo que debería ser el saber a enseñar y, por medio de una deducción que ya no le pertenece y que sólo puede sugerir, puede recordar lo que debería ser el saber enseñado; pero no puede, a causa de su ilegitimidad en ese rol, promoverse al papel de pedagogo y decir *cómo* se debería enseñar. ¡Sin mencionar aquí el lugar, todavía tan incierto, que podría ocupar el didacta! Para nuestro objetivo, nos atendremos al esquema propuesto: nuestra intención es explicar un fenómeno, no acumular los rasgos descriptivos para que parezca verdadero. La explicación científica no busca un hiperrealismo fenoménico; la ciencia es un añadido a lo real, no un facsímil del mundo, y lo que es poco significativo no debe ser tenido en cuenta.

¿Por qué, entonces, hay flujos de saber que van del entorno hacia el sistema de enseñanza pasando por la noosfera? El primer problema que debe ser resuelto para que exista el sistema de enseñanza, es decir, para que la enseñanza *sea posible*, es el de la compatibilidad del sistema con su entorno. Esta compatibilidad debe realizarse en múltiples y diferentes planos (aunque solidarios entre sí). Pero, en lo que respecta al plano del saber, podemos caracterizarla simplemente por una doble condición. Por un lado, el saber enseñado –el saber tratado en el interior del sistema– debe ser visto, por los mismos "académicos", *como suficientemente cercano al saber sabio* a fin de no provocar la desautorización de los matemáticos, lo cual minaría la legitimidad del proyecto social, socialmente aceptado y sostenido, de su enseñanza. Por otra parte y simultáneamente, el saber enseñado debe aparecer como algo *suficientemente alejado del saber de los "padres"* (o, al menos, de esas fracciones de clases que en una formación social semejante ocupan el escalón más alto en materia de educación), es decir, del saber banalizado en la sociedad (¡y banalizado muy especialmente por la escuela!). En este punto también, una distancia inadecuada llevaría a poner en cuestión la legitimidad del proyecto de enseñanza, degradando su valor –en ese caso, ¡los enseñantes no harían más que lo que los propios padres podrían hacer tan bien como ellos si simplemente dispusieran del tiempo necesario! Pero, la distancia correcta que el saber enseñado debe guardar respecto del saber sabio y también respecto del saber banalizado resulta poco a poco erosionada. El saber enseñado *se gasta*. Se trata de un desgaste que podemos considerar "biológico" y que lo aleja demasiado visiblemente del saber sabio. Desgaste "moral" también, u obsolescencia, que lo acerca peligrosamente al saber banalizado. Con el tiempo, el saber tratado por el sistema de enseñanza envejece; un buen día se percibe que se ha vuelto viejo en relación a la sociedad (en relación con el saber sabio y con el saber banalizado). Por un lado –envejecimiento biológico– se lo declara en desacuerdo con el desarrollo del saber correspondiente en sus formas libres (no escolarizadas). Desacuerdo que puede comprender contenidos diversos: puede ocurrir que como corolario del progreso de la investigación se revelen como falsos los resultados hasta entonces enseñados –situación que no es infrecuente en biología, por ejemplo; o puede ocurrir incluso que cierta cuestión, que ocupaba un lugar importante en los programas, bruscamente se considere carente de interés a la luz de nuevos desarrollos o cambios en las problemáticas del campo científico considerado, etc. Por otro lado –envejecimiento "moral"– el saber enseñado se encontraría en desacuerdo con la sociedad en un sentido amplio, aunque, llegado el caso, si se lo juzgara estrictamente según los criterios de la disciplina correspondiente no habría nada que reprocharle. En resumen, una cuestión de época o de estado de ánimo.

En los dos casos, el desgaste del saber enseñado supone como resultado la incompatibilización del sistema de enseñanza con su entorno. Los matemáticos se inquietan por la falta de autenticidad de una enseñanza que para ellos es demasiado ajena a las formas contemporáneas del saber de las que se sienten responsables naturales. Los padres se convencen de la inadecuación del sistema de enseñanza, al que pronto reprochan sin mesura su arcaísmo y su falta de dinamismo. Los profesores se sienten afectados por el desprestigio que los alcanza y se irritan a causa de esa doble mirada de sospecha lanzada a sus espaldas y que atenta contra la autonomía necesaria del funcionamiento didáctico –y que les impedirá, tarde o temprano, realizar su trabajo... Para restablecer la compatibilidad, se torna indispensable la instauración de una corriente de saber proveniente del saber sabio. El saber enseñado se ha vuelto viejo en relación con la sociedad; un nuevo aporte *acorta la distancia con el saber sabio*, el de los especialistas; y *pone a distancia a los padres*. Allí se encuentra el origen del proceso de transposición didáctica.

Se comprenderá mejor la significación de esta poderosa conmoción, de ese gran movimiento que fue "la reforma de las matemáticas modernas", cuyo análisis se encuentra aun hoy insuficientemente realizado (incluso aunque la crítica se llevara a cabo muy prontamente), si, en lugar de buscar el principio explicativo en la estructura de las matemáticas mismas (como su nombre, que subraya además tan nítidamente la obsesión por el desgaste del saber, nos invita sin embargo expresamente a hacer), intentamos considerarla como un conjunto de modificaciones, globales y locales, que procuran restablecer la compatibilidad entre el sistema de enseñanza y su entorno, entre la sociedad y su escuela. Tomaré aquí un solo ejemplo. ¿Por qué, si los docentes han enseñado desde siempre las cuatro operaciones, experimentamos la necesidad, a fines de los años sesenta, de envolver esas cuatro operaciones bajo el concepto de *operadores*?

Porque la introducción de los operadores satisface numerosas condiciones vitales para nuestro sistema. En relación con el entorno, se presenta a priori como una operación de la que podemos esperar un beneficio excepcional. De ese modo, del lado de las matemáticas, por el recurso al nombre mismo de operador, esta operación ofrece la garantía de una benévola neutralidad: el elemento que por medio de ésta toma su lugar en el saber enseñado posee sus diplomas de nobleza matemática. La maniobra es incluso extremadamente audaz; ¡la noción de operador nos hace situarnos por encima de todas las clases del liceo! El alumno más pequeño no la reencontrará sino mucho más tarde (pero entonces ya según su uso originario, o casi), en la universidad, ¡si acaso la reencuentra! Pero el cambio alcanza su mayor funcionalidad *frente a los padres*. Los padres –aquellos que forman parte de las clases medias y superiores, por lo menos– podían creer, efectivamente, partiendo de la amplia banalización social de la técnica de las cuatro operaciones, que el profesor, en el fondo, sólo estaba haciendo lo mismo que ellos habrían podido

hacer si dispusieran del tiempo para hacerlo. Esta tendencia a descalificar la tarea, desvalorizaba el oficio y el docente casi podía a llegar a perder su existencia social –ocupando el mismo lugar que la empleada doméstica. ¡Su lugar parecía ser el de quien resuelve un problema *no de competencia técnica sino de tiempo*! Después de la introducción de los operadores, que exige de los profesores un esfuerzo nada menospreciable, la situación se modifica enteramente. Su oficio tendía a ser descalificado; pues bien, ahora son los padres los que, brutalmente, se encuentran en peligro de ser descalificados. Se invierte la trayectoria de las protestas: los padres se sienten molestos porque ya no comprenden. Desde una posición baja, los enseñantes pasan de inmediato a una posición alta, que por un tiempo restablece su autonomía de funcionamiento...

Si interrogamos a quienes, en los años sesenta (y algunos ya a partir de los años cincuenta) fueron los promotores y los artesanos de la reforma, los veremos sorprenderse e incluso molestarse ante la explicación que acabo de proporcionar. La motivación para introducir los operadores les parece enteramente diferente –la examinaremos enseguida. Pero lo que resulta sorprendente y que conviene subrayar debidamente, se encuentra en otra parte. Las relaciones entre el sistema de enseñanza y su entorno, entre la sociedad y su escuela, son ciertamente de una impresionante complejidad. No es en absoluto sorprendente que a la larga se manifiesten desajustes y que ciertos reajustes se revelen, por lo tanto, necesarios. Pero cuando se estudia el mecanismo por el cual se realizan esas readaptaciones nos encontramos con lo siguiente: para modificar este enorme entrelazamiento de interacciones, todavía tan poco explorado y tan mal conocido, es posible –incluso si se trata de una operación delicada y que supone tantos riesgos (de los que hemos tomado conciencia tardiamente, precisamente en relación con la reforma)– obtener un resultado *manipulando una sola variable*: el saber. Obviamente puede invertirse el argumento y sostenerse que al querer modificar tanto con tan poco, no es sorprendente que surjan nuevos desajustes, eventualmente más graves que los que se procuraban corregir. Sin embargo es necesario, de todos modos –especialmente si queremos comprender la acción de la noosfera–, subrayar *la desproporción entre el medio puesto en funcionamiento* (una modificación del saber) y *el efecto buscado* (una reestructuración *del conjunto* de las relaciones entre sistema y entorno). La fiabilidad del procedimiento puede ser insuficiente. Su efectividad no es menos cierta.

La noosfera es el centro operacional del proceso de transposición, que traducirá en los hechos la respuesta al desequilibrio creado y comprobado (expresado por los matemáticos, los padres, los enseñantes mismos). Allí se produce todo conflicto entre sistema y entorno y allí encuentra su lugar privilegiado de expresión. En este sentido, la noosfera desempeña un papel de tapón. Inclusive en períodos de crisis, ésta mantiene dentro de límites aceptables la autonomía del funcionamiento didáctico. El profesor en su clase está en principio al abrigo de las dificultades con las que se encontrará el miércoles por la tarde*, cuando entrando en la noosfera, participe, por ejemplo, en una reunión de profesores de su disciplina. Si en algún momento debe modificar su enseñanza, eso se determinará por la mediación de la noosfera –incluso si, administrativamente, recibe esa orden de la instancia política– y no bajo la presión directa de las exigencias de los padres o de los matemáticos. Comprobado este hecho, ¿cómo puede actuar la noosfera para restablecer la compatibilidad entre sistema y entorno? Tradicionalmente existe un análisis dicotómico de los medios de acción que pueden ponerse en práctica,

* N. del T. El miércoles es día de asueto general en los colegios franceses.

que distingue por un lado los métodos y por otro lado los contenidos. Ciertamente, la producción de la noosfera es abundante, tanto respecto de los primeros como de los segundos. Para muchos de sus miembros la pedagogía es una profesión –para otros, un comercio– y por ende elaboran doctrinas según una gama de lo más variada (aunque se puede demostrar que la mayor parte de las doctrinas proceden, a partir de una combinatoria muy limitada, de una temática finita –"motivación", "esfuerzo", "actividad", "concreto", etc.– y que algunas son altamente irrealistas). Pero lo que distingue esencialmente esas dos vías de acceso al cambio, es la relación costo/eficacia. El saber –los contenidos– ofrece una *variable de control muy sensible* que permite obtener efectos espectaculares con menores gastos y sobre la cual la instancia política tiene asegurado el *control* por medio de los programas y de sus comentarios oficiales y los manuales que los explicitan. Contrariamente, los "métodos" que ocupan cierto lugar en el *interior* de la noosfera constituyen un medio de acción *muy poco efectivo*. La inexistencia de canales seguros –que serían, respecto de los métodos, equivalentes a lo que son los programas y su acompañamiento para los contenidos– a través de los cuales podría imprimirse un cambio a ese nivel en el sistema de enseñanza, implica un costo excepcionalmente alto para su operativización. La historia reciente de este siglo muestra que si bien pueden aportarse modificaciones nuevas en este sentido, éstas siguen siendo sólo de orden local, incluso puntual, y a menudo se muestran lábiles. Existe algo así como una "ergodicidad" del sistema de enseñanza que, a pesar de las perturbaciones creadas por el mal uso de los métodos, lo conduce a un estado de mejor economía en el que la variable determinante es nuevamente el saber (¡o su ausencia!). A eso hay que agregar que ese privilegio funcionalmente concedido al saber se expresa y refuerza a la vez por la división de la noosfera según los diferentes saberes enseñados, acerca de los cuales los "especialistas" –no sin razón, como acabamos de ver– conservan como horizonte principal, sino único, el saber del que se consideran a cargo: y se comprende entonces la elección de la acción, aparentemente deliberada, que va a efectuar la noosfera.

Porque la noosfera opta prioritariamente por un reequilibrio *por medio de una manipulación del saber*. Es ésta, pues, la que va a proceder a la selección de los elementos del saber sabio que, designados como "saber a enseñar", serán entonces sometidos al trabajo de transposición; también es ésta la que va a asumir la parte visible de ese trabajo, lo que podemos llamar el trabajo *externo* de la transposición didáctica, por oposición al trabajo *interno*, que se realiza en el interior mismo del sistema de enseñanza, bastante después de la introducción oficial de los nuevos elementos en el saber enseñado. ¿Cómo se opera esta selección, cuáles son sus objetivos? Hemos visto que la selección que ha de hacerse no es sencilla, ya que debe restablecer, en relación con el saber, una dialéctica sutil –la "buena" distancia– entre sistema y *entorno*. Sin embargo, *éste no es un objetivo para la noosfera*. Sin duda, los artífices de la reforma no reconocerían su estrategia en el escenario que he descrito: es más, lo condenarían alegando que es fruto de un maquiavelismo mecanicista y ligeramente perverso. En todo caso, no considerarían que ese esquema explicativo tenga nada que ver con sus intenciones conscientes y explícitas (o explicitables), incluso si, acordando con nuestra perspectiva, reconocieran finalmente en ese esquema no sólo una lectura verosímil de un escenario inconsciente del que habrían sido, sin saberlo, los actores mistificados (todo habría ocurrido como si...), sino el *efecto real*, debidamente constatable (el saber enseñado se acercó realmente al saber sabio, los padres fueron efectivamente puestos a distancia, por un tiempo) de su acción y del movimiento de conjunto donde se inscribía la historia.

A decir verdad, habría buenas razones para justificar esta actitud: siempre las mismas. Puesto que un pleno reconocimiento equivaldría aquí a reabrir el campo de la conciencia didáctica de modo tal que se perciba la existencia de un más allá del sistema didáctico y a poner en peligro, más profundamente todavía, precisamente lo que se procura restaurar –la autonomía relativa (es decir, ficticia) del funcionamiento didáctico. ¿Qué esperaba entonces la noosfera de una modificación del saber –tal vez al margen de ese propósito tan poco confesable que el análisis hizo ver? Para responder conviene completar ahora la descripción del desequilibrio entre el sistema de enseñanza y la sociedad. Hemos adoptado, en cada caso, el punto de vista de los académicos, el de los padres, el de los enseñantes. Falta el punto de vista de los alumnos. Afirmé antes que el profesor, en su clase, se encontraba relativamente protegido de la "crisis". De hecho, el profesor se encuentra finalmente con la crisis, que se le hace manifiesta *adoptando la forma de los alumnos*. Existe algo así como una dualidad entre alumnos y saber enseñado; el desgaste del saber es el saber que deviene viejo en relación con la sociedad; es también, *dualmente, la sociedad que deviene vieja* (desgastada), a través de sus niños, *en relación con el saber*. Concretamente, ese saber ya no "sirve", los alumnos ya no llegan a absorberlo, la frescura del (re)comenzar desaparece: a falta del poder para cambiar a los alumnos, se hace preciso *cambiar el saber*. Así, el desgaste del saber se diagnostica simultáneamente (y dualmente), como *crisis de la enseñanza*. Para el enseñante, y para sus representantes en la noosfera, *la reforma debe apuntar a eso*: a permitir que se responda de manera satisfactoria a la "crisis de la enseñanza" que él experimenta cotidianamente, y resolver el problema de las dificultades de aprendizaje —restaurar el deseo de saber (la famosa "motivación") y darle los medios para contrarrestar la progresiva necrosis, a la que ve ganando terreno cada año...

Si nos deshacemos por un instante de la evidencia de una expectativa tan familiar, las razones de esta actitud resultan sorprendentes. ¿En qué sentido una modificación del saber enseñado puede, por ejemplo, suprimir las dificultades de aprendizaje? Descartemos una primera respuesta, de apariencia simplista pero en absoluto subestimable: si surge una dificultad, a propósito de tal o cual noción o tipo de ejercicio, es evidentemente posible suprimir esa noción o ese tipo de ejercicio. Ese mecanismo funciona precisamente en el curso de la transposición didáctica, pero permanece generalmente bajo una propicia falta de claridad que posibilita la ausencia de una conciencia clara del fenómeno y de la asunción de su intencionalidad. Incluso bloques enteros del saber enseñados pueden resultar alcanzados por esta expulsión —fenómeno de vaciamiento de contenidos que se observa en ciertas épocas de amplia apertura del sistema de enseñanza respecto de nuevos flujos de alumnos (en las fases de democratización intensiva, por ejemplo), que suscita la inquietud y la oposición de los "herederos" y que es correlativo, en períodos ordinarios, a la constitución de las orientaciones "básicas" del sistema de enseñanza. Una segunda respuesta, de complejidad superior, parece aquí más pertinente. Para darla debemos partir de una comprobación: después de enfrentarse con una dificultad repetida, el enseñante cree espontáneamente en la posibilidad de que puede ser eficazmente resuelta *a partir de una reorganización del saber*. En soledad, al frente de su clase, el profesor pensará en retocar su curso, en general según una combinatoria simple (por ejemplo, alterará el orden de dos elementos —la continuidad antes que los límites, mientras que hasta entonces hacía lo contrario—). Pero cuando se

presenta la ocasión para una reforma de los programas, los medios, y con ellos las ambiciones, adquieren otra dimensión. Ya no se trata de una simple reorganización por permutación sino de una verdadera *refundación* del conjunto de los contenidos. Reelaborando el texto del saber, y especialmente otorgando una existencia en el discurso a aspectos anteriormente no registrados, se procuran, simultáneamente, las herramientas para un diagnóstico y una medicación. Veremos un ejemplo de ello.

En los años cincuenta, al igual que en los ochenta, los alumnos escriben obstinadamente, no todos y no todo el tiempo, pero lo suficientemente a menudo como para que el profesor se irrite y quiera remediarlo, la pseudo igualdad de este modo: $\frac{a+b}{a+c} = \frac{b}{c}$. Si la delimitación de lo real matemático que realiza el texto del saber no permite *nombrar* este error, o insertarlo en un conjunto significativo de prácticas, a título de desviación, es natural que resulte irritante —sin que se posean siquiera los medios para referirse a ello. Pero, con la introducción de la delimitación textual "moderna" (ley de composición, elemento neutro, operación inversa, etc.), la situación se modifica. Se podrá nombrar el error, constituirlo como contratipo de un tipo de práctica legítima y autentificada por el discurso matemático de enseñanza. He aquí, por ejemplo, cómo un autor contemporáneo del movimiento de reforma de los años sesenta aborda la dificultad que acabo de mencionar: "El procedimiento de 'simplificación' —escribe— se basa en la noción de operación inversa 'en el interior de una familia' y el resultado es el elemento neutro para esta familia". (Las confusiones al respecto conducen a los errores:

$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b}{c}, \frac{a}{a} = 0$.)" 7

Esta breve cita es muy reveladora del trabajo operado en la noosfera. Afirma en principio la posibilidad de *volver a rotular*, en el lenguaje de las matemáticas modernas, la vieja noción de "simplificación", mencionada solamente entre comillas, que se ha propuesto reducir a la noción de operación *inversa* ("en el interior de una familia"). Luego, la cita plantea, entre paréntesis (hasta tal punto la cosa parece darse por sentada), la virtud *diagnóstica* y la eficacia *terapéutica* de esta nueva lectura de las prácticas matemáticas en la clase. Por un lado, ésta permite *identificar* errores bien conocidos pero erráticos en relación con las clasificaciones anteriores. (Así, el error que hemos tomado como ejemplo se presenta ahora como una transgresión de las reglas acerca de la *operación inversa* y el *elemento neutro*.) Por otra parte, esta transgresión se imputa a una confusión (por parte del alumno). Pero, a ese diagnóstico de confusión responde inmediatamente, por parte del enseñante, la técnica curativa que consiste en insistir, a través de la repetición y la exhortación verbales, en el principio transgredido. El autor citado se refiere a ello como el *ataque directo* a los errores: "Me parece, escribe efectivamente, que los errores más graves provienen de la confusión entre las operaciones de adición y de multiplicación como así también de un desconocimiento del orden de las operaciones. Solamente un 'ataque directo' a esas faltas permitirá esperar su corrección".[8]

El trabajo que la noosfera realiza para elaborar el nuevo texto del saber se consagra así a una estrategia de ataque de aquellas dificultades de aprendizaje cuya pregnancia entre los enseñantes y su gran estabilidad hay que aceptar (como un problema planteado a la didáctica): toda dificultad observada debe primeramente ser identificada, es decir, debe ser reconocida como algo que viola una regla debidamente establecida (conmutatividad, distributividad, regla de los signos,

etc.). A partir de allí, se hará que el alumno que incurra en el error preste atención a la regla transgredida para disipar la confusión que se supone está en la base de su error. Es ésa la gran esperanza que permite confiar, en compensación por las incertidumbres de un futuro aún incierto, en la perspectiva de las modificaciones aportadas al saber enseñado. Toda reorganización del texto del saber lleva en sí, orgánicamente, un reacondicionamiento de la noseografía en uso y abre de ese modo una vía de acceso, que se supone más eficiente, a la patología ordinaria del aprendizaje. Obviamente, el texto del saber define los principios que el alumno debe respetar y delimita entonces, en un momento dado, los errores que el profesor podrá identificar y para los cuales dispondrá, con el diagnóstico de "confusión", de la técnica del "ataque directo"; y los errores que deberá renunciar a elucidar, para los cuales no podrá pronunciar el veredicto de confusión –para que haya confusión es preciso que haya también identificación de, al menos, una "ley", y aplicación de ésta en un caso no pertinente– y para los cuales no habrá más recurso que formular un diagnóstico tan inespecífico como el de la "falta de atención", exigiendo –medicación bien pobre– *un poco más de atención*, sin poder "atacar" nada más preciso. Así, el nuevo texto del saber lleva en sí, intrínsecamente, los límites de las esperanzas que hace nacer y que, muchas veces rápidamente perdidas, se perpetúan sin embargo en una fe ingenua siempre dispuesta a reanudarse. No está entre mis propósitos proceder a una *crítica* de esta expectativa indefinidamente sostenida: solamente se trata de reconocer su existencia, su tenacidad, de identificar sus efectos, de subrayar su significación, tanto para los enseñantes como en la noosfera. Para el enseñante, la herramienta esencial de su práctica *es el texto del saber* (que deviene palabra a través de él), en las variaciones que él se permite imponerle. Las otras variables de gobierno de las que puede disponer –especialmente aquellas que no están específicamente ligadas a contenidos de saber– son variables subordinadas y le permiten sobre todo organizar la puesta en marcha de su primer arma, el texto del saber. Éste, el único capaz de hacer existir al enseñante en cuanto tal, es al mismo tiempo el principal instrumento terapéutico. Es a través de él e inmediatamente gracias a él, que el enseñante actuará para modificar los efectos de la enseñanza o para actuar sobre lo que siga siendo patológico, a pesar a la enseñanza dada. En consonancia con esta pura lógica de la acción, los miembros de la noosfera aprecian cualquier reacomodamiento de la estructura del saber enseñado con el fin de renovar los medios para prevenir y curar lo que este reacomodamiento trae consigo. O más bien, las elecciones que tienen lugar en el saber sabio se guían por esta exigencia. Cualquier nueva noción que aparezca, cualquier nueva presentación que se proponga, será evaluada, juzgada, promovida en función de su capacidad (supuesta) para tratar las dificultades más evidentes. Así fue como la teoría de los operadores tuvo también, junto a sus virtudes "ennoblecedoras" (de las que hablé antes), la ventaja de hacer pensar (por un razonamiento en cuyo análisis no puedo detenerme aquí) que era posible refortalecer gracias a ella la enseñanza de las cuatro operaciones, resolver, desplazando el problema por medio de un cambio en el saber enseñado, las dificultades con las cuales esa enseñanza venía tropezándose hasta entonces.

La actividad ordinaria de la noosfera busca en principio conscientemente un cambio "terapéutico". Cambio no es sinónimo de modernización. El cambio es aquí excepcionalmente buscado en la perspectiva de una puesta al día del saber enseñado. Los requisitos de compatibilidad quedan al margen de la intención reformadora. Cuando afloran a la conciencia del reformador es bajo la forma de un travestismo

estereotipado, convertidos en consignas que designan y enmascaran a la vez su sentido: de la "modernización" a la "apertura de la escuela a la vida" –expresión polémica que proclama atolondradamente, a sus espaldas, el *cierre* del orden didáctico. Sin embargo, los requisitos de compatibilidad son los más fáciles de satisfacer. Todo lo que se toma exitosamente en préstamo del saber sabio, es decir, todo préstamo cuya inserción en el saber enseñado está fundado sobre el funcionamiento didáctico –¡lo que supone de todos modos el complejo trabajo de la transposición didáctica!–; todo préstamo tomado exitosamente del saber, logra satisfacer esos requisitos al menos parcialmente y, de algún modo, automáticamente. No es necesario *querer* responder a las exigencias de compatibilidad para darles una respuesta. Este logro no presupone en absoluto la clara conciencia de lo que éste realiza. Prácticamente toda la atención de la noosfera se orienta en otra dirección. Pero, debido a la insistencia en esta única preocupación, las posibilidades de éxito se encuentran altamente comprometidas. La empresa es azarosa, los resultados inciertos, a menudo sospechosos. ¿Cómo asombrarse? Se habrá notado, así, el legalismo impávido que cimenta la búsqueda de un "mejor" texto del saber. Aquí el error está considerado en relación con una ley que, "por confusión" –y se subrayará el valor transaccional, de negociación, de esta expresión– el alumno no habría sabido respetar; la acción reparadora consiste en invitar al culpable a que respete la ley matemática, recordándole sus términos y, si cabe, exhortándolo a recordarlos y a conformarse a ellos. Una concepción semejante tiene muy poca relación con lo que se pretende cambiar. Y el análisis didáctico no tiene ninguna dificultad para demostrar que, bajo la cosmética de superficie del cambio de programas, la estructura profunda de la relación didáctica, por lo general, apenas resulta afectada por muy débiles alteraciones.

Con esto, el trabajo de la noosfera está apenas iniciado. Puesto que, entre el proyecto –marcado por la designación del saber a enseñar– y su realización, un tercer orden de condiciones plantea obstáculos. Alineados junto a las condiciones de *compatibilidad* y a aquellas que la noosfera se impone a sí misma, se encuentran las que podríamos denominar condiciones de *componibilidad*: con los elementos anteriores (retomados del antiguo texto del saber) y los nuevos (tomados del saber sabio), es preciso construir un texto nuevo, llevar a cabo una integración aceptable de unos y otros. La noosfera encuentra en ese punto el determinismo propio del funcionamiento didáctico. Procura obstinadamente, por caminos a menudo inciertos, la organización de una *buena* enseñanza. El orden didáctico, que no se pliega a nuestros deseos, viene a recordarle que una enseñanza, antes de ser buena, debe ser simplemente *posible*. De las condiciones didácticas, la noosfera toma explícitamente en cuenta algunas, en diversos niveles. (Así, por ejemplo, las condiciones que denominé *crono* y *topogenéticos*: hay que prever un "curso", un curso para preparar y un curso para enseñar, hay que prever "ejercicios".) Pero otros muchos se nos escapan. Cuando los programas son preparados, conformados y adquieren fuerza de ley, comienza otro trabajo: el de la transposición didáctica *interna*. Algunos de los hallazgos más bellos de la noosfera no resisten esa prueba. En poco tiempo, el funcionamiento didáctico dejó malparada a la ambiciosa teoría de los operadores. Otros elementos, al contrario, se funden con el paisaje como si desde siempre hubieran estado allí. Misterios del orden didáctico del que hasta ahora, todavía, no sabemos demasiado.

1.

¿Qué es la transposición didáctica?

1.1. *Todo proyecto social de enseñanza y de aprendizaje* se constituye dialécticamente con la identificación y la *designación de contenidos de saberes* como *contenidos a enseñar*.

1.2. Los contenidos de saberes designados como aquellos *a enseñar* (explícitamente: en los *programas*; implícitamente: por la tradición, evolutiva, de la interpretación de los programas), en general *preexisten* al movimiento que los designa como tales. Sin embargo, algunas veces (y por lo menos más a menudo de lo que se podría creer) son verdaderas *creaciones didácticas*, suscitadas por las "necesidades de la enseñanza". (Así ocurrió, por ejemplo, en la enseñanza secundaria francesa, con el "gran coseno" y el "gran seno").

1.3. Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los *objetos de enseñanza*. El "trabajo" que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la *transposición didáctica*.

1.4. La transformación de un contenido de saber preciso en una versión didáctica de ese objeto de saber puede denominarse más apropiadamente "transposición didáctica *stricto sensu*". Pero el *estudio* científico del proceso de transposición didáctica (que es una dimensión fundamental de la *didáctica de las matemáticas*) supone tener en cuenta la transposición didáctica *sensu lato*, representada por el esquema

→ objeto de saber → objeto a enseñar → objeto de enseñanza

en el que el primer eslabón marca el paso de lo implícito a lo explícito, de la práctica a la teoría, de lo *preconstruido* a lo *construido*.

1.5. Veamos un ejemplo que realiza el movimiento representado por el esquema de la transposición didáctica:

—la noción de *distancia* (entre dos puntos) se utiliza espontáneamente "desde siempre";

—el *concepto matemático* de distancia es introducido en 1906 por Maurice Fréchet (objeto de saber matemático);

—en el primer ciclo de la enseñanza secundaria francesa, la noción matemática de distancia, surgida de la definición de Fréchet aparece en 1971 en el programa de la clase de cuarto curso (objeto a enseñar);

—su tratamiento didáctico varía con los años a partir de su designación como objeto a enseñar: continúa el "trabajo" de transposición.

2.

¿Existe la transposición didáctica? O la vigilancia epistemológica

2.1. ¿Existe la transposición didáctica? ¿El objeto de enseñanza es *verdaderamente* diferente del objeto de saber al que le responde?

2.2. Podemos considerar la existencia de una transposición didáctica, como proceso de conjunto, como situaciones de *creaciones didácticas de objetos* (de saber y de enseñanza a la vez) que se hacen "necesarias" por las *exigencias* del funcionamiento didáctico.

2.3. Entre los muchos ejemplos de ese tipo de creaciones mencionemos el "gran coseno" (Cos) y el "gran seno" (Sen), los números complejos como matrices cuadradas de orden 2, en el segundo ciclo de la enseñanza secundaria; la noción de operador-máquina, en la enseñanza primaria. (Aunque sólo se consideren estos ejemplos, se observa que tales creaciones *ad hoc* del sistema de enseñanza pueden correr muy diversa suerte.)

2.4. Delimitando el saber enseñado según conjuntos más vastos, podemos comprender casi como una caricatura el efecto de la transposición didáctica, en las situaciones en las que se produce una verdadera *sustitución didáctica de objeto*. Sobre ese tema, Michel Verret escribe lo siguiente:

"*Cuanto más distante es la forma escolar del contenido cuya enseñanza procura, más probable es esta conversión de objeto. La historia nos proporciona al menos dos grandes ejemplos de ello: la transformación de la literatura y de la magia adivinatoria en sus figuras escolares en la escuela confuciana, la transformación de la metafísica cristiana en filosofía escolar en la Universidad Escolástica, transposiciones de las que encontramos un equivalente en la enseñanza secundaria francesa en el siglo XVII, con la sustitución de la enseñanza del latín escolar por la enseñanza del latín clásico; en el siglo XIX, con la sustitución de la enseñanza del espiritualismo universitario por la enseñanza de la filosofía a secas.*" (Verret, 1975, pp. 177-178).

2.5. En lo que respecta a la enseñanza de las matemáticas, tenemos (en el siglo XVII) el testimonio –sin duda algo singular– del propio Descartes: sobre ese tema, puede consultarse, por ejemplo, a Mesnard (1966) (especialmente pp. 6-7 y 89-91).

2.6. En el período contemporáneo, evidentemente hay que mencionar *la reforma de las matemáticas modernas*, que se proyecta a partir de los años cincuenta y va a realizar, en el curso de los años setenta, una sustitución de objeto de una amplitud quizás nunca igualada. Sobre esta cuestión, es posible remitirse, por ejemplo, a los análisis de Chevallard 1980b.

2.7. Esa sustitución didáctica ha provocado un gran número de creaciones didácticas de objetos. Así, en el paso de

la teoría de conjuntos de los matemáticos a la teoría de conjuntos de la escuela primaria, surgieron diversos objetos por las exigencias de la transposición didáctica: los "*diagramas de Venn*" constituyen en este sentido un ejemplo sorprendente, sobre el que puede leerse una apreciación desarrollada en Freudenthal (1993) pp. 332-335 y 341-350.

2.8. En lo que precede, la existencia de la transposición didáctica es explicada a través de algunos de sus efectos más espectaculares (creaciones de objetos) o por medio de sus inadecuadas *disfunciones* (sustituciones "patológicas" de objetos).

2.9. Pero existe otra manera de plantear el problema de la existencia de la transposición didáctica: una manera de plantear ese problema que participa del *principio de vigilancia epistemológica*, que el didacta debe observar constantemente.

2.10. Así, cuando el *docente* diga: "Hoy, les he mostrado $a^2 - b^2$", el *didacta* se preguntará: "¿Cuál es este objeto de enseñanza que el docente rotula como "$a^2 - b^2$"? ¿Qué relación entabla con el objeto matemático al que implícitamente refiere?" Allí donde el enseñante ve la identidad del fin (el objeto designado como enseñable) y de los medios (el objeto de la enseñanza, tal como lo ha moldeado la transposición didáctica), el didacta plantea la cuestión de la *adecuación*: ¿no hay acaso conversión de objeto? Y en ese caso, ¿cuál?

2.11. La duda sistemática al respecto ("¿Se trata efectivamente del objeto cuya enseñanza se proyectaba?") es la señal y la condición de la *ruptura epistemológica* que permite al didacta deshacerse de las evidencias y de la transparencia del universo de enseñanza que él vive en tanto que enseñante (o al menos, en tanto el alumno que ha sido). Puesta en cuestión sistemática que lo arranca de la *ilusión de la transparencia.*

2.12. Descubrimos entonces que, del objeto de saber al objeto de enseñanza, la distancia es, con mucha frecuencia, inmensa. A propósito de la noción de *ecuación paramétrica*, véase por ejemplo Schneider (1979); y para "$a^2 - b^2$", véase Tonnelle (1979).

3.

¿Es buena o mala la transposición didáctica?

3.1. El ejercicio del principio de vigilancia en la transposición didáctica es una de las condiciones que determinan la posibilidad de un *análisis científico* del sistema didáctico.

3.2. Pero al mismo tiempo, ese principio lleva dentro de sí el *límite de receptibilidad*, por parte del sistema de enseñanza y sus agentes (en primerísimo lugar, los docentes), de los análisis que dicho principio permite producir.

3.3. En efecto, su eficacia particular consiste en iluminar la *diferencia* allí donde se halla negada por el docente; en cuestionar la identidad espontáneamente supuesta, para hacer aparecer la inadecuación cuya evidencia enmascara.

3.4. El docente no percibe espontáneamente la transposición –por lo menos no le concede especial atención:

"El docente en su clase, el que elabora los programas, el que hace los manuales, cada uno en su ámbito, instituyen una norma didáctica que tiende a constituir un objeto de enseñanza como dis-

tinto del objeto al que da lugar. De ese modo, ejercen su normatividad, sin asumir la responsabilidad -epistemológica- de este poder creador de normas. Si esperan, a veces, la aprobación o el rechazo del especialista, sitúan esa apreciación como algo exterior a su proyecto, y ajeno a su lógica interna. Esta apreciación es considerada posteriormente o puede acompañar a dicha lógica, pero raramente se integra en ella, por imposibilidad de tomarla en cuenta en sus implicaciones epistemológicas. Posee valor estético o moral, interviene en la recepción social del proyecto. No informa de ello a la estructura ni a los contenidos sino de una manera mimética y en un intento de acreditarlos frente a los poderes institucionalmente investidos."

(Chevallard, 1978, pp. 4-5).

3.5. En el caso de que reconozca los hechos de transposición didáctica, creación o sustitución de objetos, el enseñante tendrá la horrible sensación de que lo encontraron con las manos en la masa. El análisis –salvaje o intencional–de la transposición didáctica es fácilmente vivido como *descubrimiento de lo que estaba oculto*, y de lo que había permanecido oculto lo hacía porque era culpable. Culpable, en este caso, en relación con la "verdad matemática". Culpable ante el ojo del Maestro, el matemático.

3.6. De allí que se observe una verdadera resistencia al análisis didáctico, parecida a esa "resistencia al psicoanálisis" que, según Freud, es causada por la *vejación psicológica* que engendra el *rechazo* (a ver, admitir, aceptar) o incluso las formas más diversas del reconocimiento culpabilizado.

3.7. Es verdad que el didacta –o cualquier otro– puede ponerse a revolver, a descubrir, con un fervor sádico; introducir la sospecha de la mirada policial; escandalizar y obtener cierto placer en hacerlo. Hay una manera de utilizar el análisis didáctico que es negativa y estéril: consiste en jugar a atemorizar (¡incluso a atemorizarse!). Para el didacta, ésa es una de las muchas maneras de no llevar a cabo la *ruptura* necesaria, de ahorrarse el doloroso trabajo que debería llevarlo más allá del bien y del mal.

3.8. Este uso negativo del análisis didáctico pretendería legitimarse como *un uso crítico*. El que lo lleva a cabo, se instalaría entonces en una posición desde la que resulta fácil la objeción, pero sus "luces" no servirían para nada, excepto para *cegar* a su "víctima": el profesor.

3.9. El uso "crítico", incluso autocrítico, del análisis de la transposición didáctica es una primera reacción, sin duda inevitable, frente al reconocimiento de la existencia de la transposición didáctica. Para una ilustración más completa, veáse Verret 1975, pp. 182-190.

3.10. Según esa primera reacción, la transposición didáctica es percibida como algo *malo*: pecado irredimible de todo proyecto de enseñanza o, en el mejor de los casos, mal necesario.

3.11. En esa perspectiva, el valor de una transposición didáctica se podría comparar con el reparo de la *construcción histórica*, en el seno de la comunidad matemática, del objeto de saber cuya enseñanza sería, por ese medio, alcanzada. La construcción o la *presentación didácticas* de los saberes sería una versión más o menos degradada de su *génesis histórica* y de su *estatuto actual* (sin que hagamos referencia aquí a un hipotético isomorfismo de las génesis histórica y didáctica: esto requeriría un trabajo adicional, más preciso). Frente a la epistemología "natural", la enseñanza propondría, *de facto*, una epistemología "*artificial*", de menor valor.

3.12. Las nociones que preceden pueden permitir que se conciba el paso de una reacción pesimista ante la transposición didáctica (concebida por ejemplo como mal necesario), a una actitud optimista y dinámica, dispuesta a la búsqueda de *una "buena" transposición didáctica.*

3.13. Una actitud tal impone en principio al enseñante una cierta *reserva deontológica*, en virtud de su mismo optimismo: puesto que puede existir, para tal objeto de saber, una buena transposición didáctica, debemos en principio abstenernos de *enseñar* temas, incluso "interesantes" (desde el punto de vista del enseñante), para los cuales no se dispondría (o no todavía) de una transposición didáctica satisfactoria.

3.14. Esa consideración se halla bien expresada en la fina observación que citamos, perteneciente a sir Richard Livingstone (*The future of Education*, 1941): "Se reconoce al buen maestro por el número de temas valiosos que se abstiene de enseñar"*.

3.15. En sentido inverso y correlativamente, de la misma concepción se desprende la exigencia de *buscar buenas transposiciones* de los saberes correspondientes a las *demandas didácticas de la sociedad.*

3.16. Una línea de investigación que, a mi criterio, posee sobre todo la virtud de ser un "modelo mental" por oposición al cual definirse, consistiría en intentar *delimitar ventajosamente* (particularmente gracias a ciertas economías retrospectivas) la *génesis sociohistórica* del saber designado para ser enseñado. Teniendo en cuenta los logros actuales, sería posible constituir una epistemología artificial como *resumen mejorado* —es decir, dejando de lado los callejones sin salida, los fracasos, pero redesplegando toda la riqueza de desarrollos fecundos y a veces olvidados— de la construcción histórica del saber.

*N del T. En inglés en el original.

3.17. Otra línea de investigación consiste en dar cuenta de la *especificidad* del proyecto de construcción didáctica de los saberes, de su heterogeneidad *a priori* respecto de las *prácticas académicas* de los saberes, de su irreductibilidad inmediata a las génesis sociohistóricas correspondientes.

3.18. En esta hipótesis, que funda la necesidad y la legitimidad de la didáctica de las matemáticas como campo científico, el estudio de la transposición didáctica supone el análisis *de las condiciones y de los marcos* en los que ésta se lleva cabo. Existencialmente, esta perspectiva es la de un optimismo *moderado...*

4.

"Objetos de saber" y otros objetos

4.1. Es preciso *dialectizar* un poco las "definiciones" introducidas en el capítulo 1. Un "objeto de saber" sólo llega a la existencia como tal, en el campo de conciencia de los agentes del sistema de enseñanza, cuando su inserción en el sistema de los "objetos a enseñar" se presenta como *útil para la economía del sistema didáctico* (por ejemplo, porque permitiría remediar la *obsolescencia* interna o externa: véase el capítulo 6).

4.2. Esto no significa decir que un objeto de saber sólo se identifica y designa como objeto a enseñar a partir del momento en que el problema didáctico de su transposición en objeto de enseñanza estuviera (potencialmente) resuelto: el trabajo de la transposición didáctica es un trabajo que se continúa *después* de la introducción didáctica del objeto de saber.

4.3. ¿Qué es un "objeto de saber"? Para el profesor de matemáticas, ciertamente hay que incluir dentro de esta categoría las "*nociones matemáticas*": por ejemplo, la adición, el círculo, la derivación, las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes, etc.

4.4. No hay que olvidar que los "ejemplos" precedentes están dados a través de rótulos que "tienen sentido" en la comunidad de los docentes de un mismo nivel del curso escolar. El problema del análisis epistemológico y del análisis didáctico de lo que contienen esos rótulos está planteado.

4.5. Junto a las "nociones matemáticas" designadas arriba se ubican nociones que podemos llamar "*paramatemáticas*": por ejemplo, la noción de parámetro, la noción de ecuación, la noción de demostración.

4.6. Las nociones paramatemáticas son *nociones-herramienta* de la *actividad matemática*: "normalmente" no son *objetos de estudio* para el matemático. Las nociones matemáticas son objetos de estudio (se estudia la noción de número, la noción de grupo, etc.) y herramientas de estudio (¡en principio!).

4.7. Obviamente, no hay *estanqueidad* absoluta entre los dos campos: la noción de ecuación, la noción de demostración son actualmente *objetos matemáticos* en *lógica matemática*. Por lo tanto, la distinción debe referirse siempre a una *práctica precisa de enseñanza* (nivel en el plan de estudios, lugar, tiempo, sector de las matemáticas, etc.).

4.8. Las *nociones paramatemáticas* son generalmente *preconstruidas* (por *mostración*). Las nociones matemáticas son, más a menudo de lo que imaginamos, preconstruidas: es el caso, en el primer ciclo de la enseñanza secundaria francesa actual, de la noción de *polinomio* (para esta cuestión, véase Tonelle, 1979).

4.9. Sin embargo, en general, las nociones matemáticas son *construidas*. Su construcción adopta la forma:

–ya sea de una definición, en sentido estricto: "el círculo de centro O y radio R es el conjunto de puntos M del plano tales que OM = R";

–ya sea de una "*construcción*", seguida de operaciones del género: tómese Q, tómense las series de Cauchy de Q, muéstrese que forman un anillo conmutativo y unitario, tómense las series de Cauchy tendientes a 0, muéstrese que forman un ideal del anillo precedente, obténgase el cociente del anillo por el ideal, muéstrese que es un cuerpo. La construcción se realiza por una "mostración": un número real, es un elemento de ese cuerpo.

4.10. Excepto una construcción (que es a veces una definición), las nociones matemáticas poseen *propiedades* ("el *cuerpo de los reales* es tal que la ecuación $x^2 = 2$ tiene al menos una solución"). Tienen también *ocasiones de uso* ("para resolver la ecuación $2^x = 8$, tómese el *logaritmo* x log 2 = log 8, lo que conduce a una ecuación de primer grado en x que sabemos resolver").

4.11. En relación con los *objetos de saber* que son las *nociones matemáticas*, el docente espera que el alumno sepa (eventualmente):

–proporcionar la *definición* (o reconstruirla);
–proporcionar las *propiedades* ("principales"), *demostrarlas*;
–*reconocer* un cierto número de *ocasiones de uso*;
–etc.

4.12. Solamente esos objetos de saber son en *sentido estricto* (candidatos para ser) *objetos de enseñanza*. Las nociones paramatemáticas, por ejemplo, *no constituyen el objeto de una enseñanza*: son *objetos de saber "auxiliares"*, necesarios para la enseñanza (y el aprendizaje) de los objetos matemáticos propiamente dichos. Deben ser "aprendidos" (o mejor "conocidos"), pero no son "enseñados" (según el plan de enseñanza de las nociones matemáticas).

4.13. Solamente las *nociones matemáticas* constituyen el objeto de una *evaluación directa*. El docente pedirá al alumno, por ejemplo, "resolver la ecuación $x^2 - 8x + 9 = 0$". Las nociones paramatemáticas son normativamente consideradas como excluidas de la evaluación directa. Cuando el alumno que no sepa responder a la consigna: "Resolver y discutir la ecuación $x^2 - \lambda x + (\lambda + 1) = 0$", el profesor podrá concluir que el alumno "no comprendió la noción de *parámetro*". En otro nivel, dirá por ejemplo que el alumno "no comprendió la noción de *demostración*". El docente de matemáticas que en una fiesta mundana encuentra un invitado que le diga: "¡Ah, usted es profe de matemáticas! Nunca comprendí por qué $ax^2 + bx + c$ igual a cero"; podrá concluir que esa persona "no comprendió la noción de *ecuación*"...

4.14. Las *nociones paramatemáticas* (y *a fortiori*, las nociones matemáticas) son objetos de los cuales el docente toma conciencia, a los que da un nombre ("parámetro", "ecuación", "demostración", etc.): en resumen, objetos que entran en su campo de *percepción didáctica*.

4.15. Existe un estrato más profundo de "nociones", movilizadas implícitamente por el *contrato didáctico*. Para ellas, he propuesto el calificativo de "protomatemáticas".

4.16. En 4.11. mencionamos, como desempeño del alumno esperada por el profesor, el *reconocimiento* de ciertas *ocasiones de uso* de las nociones matemáticas consideradas como herramientas de la actividad matemática. Por ejemplo, en

el cuarto curso, el profesor esperará que ante la consigna:

"Factorice $4x^2 - 36y^2$"

el alumno se dé cuenta de que debe aplicar el esquema de factorización $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; pero ante la consigna:

"Factorice $4x^2 - 36x$"

el alumno deberá reconocer una factorización "simple" (que se han estudiado antes, con ayuda de una sola distributividad, antes del estudio de las "identidades notables"):

$4x^2 - 36x = 4x(x-9)$.

4.17. El desempeño del alumno puede considerarse muestra de una *competencia* o *capacidad* "subyacente" y "general".

4.18. En la enseñanza "habitual", esta *interpretación*, como indicamos en 4.13. será formulada sobre todo *negativamente*: en relación con el alumno que fracasa casi sistemáticamente en las factorizaciones y en cuya dificultad para reconocer la *situación de factorización presentada* (para seguir el ejemplo presentado arriba), el profesor sitúa la causa del fracaso; así se terminará afirmando que carece de la capacidad para reconocer las "formas" de expresión algebraicas.

4.19. Hay que notar, de todos modos, que en *raras ocasiones*, los docentes utilizan *explícitamente* la "capacidad de reconocimiento" de sus alumnos: en cuarto curso muchos profesores, con el propósito de preparar a sus alumnos para la factorización, los entrenan para "reconocer los cuadrados", por ejemplo.

4.20. La identificación de las "capacidades" por parte del docente (de la capacidad de "reconocimiento", por ejemplo) se mantiene generalmente como "subliminal", salvo cuando se diagnostican *negativamente*, como ya se dijo. *Contrariamente*, se consideran *positivamente* según ciertos *puntos de vista* sobre el *proyecto social de enseñanza*, los cuales son *distintos* de los del enseñante *stricto sensu*.

4.21. *Por encima del acto de enseñanza*, también está el punto de vista de la *organización del acto de enseñanza* según las normas de la *pedagogía por objetivos*. Esta se ocupa precisamente de definir las "capacidades" que el alumno debe poder aplicar exitosamente en relación con tal o cual enseñanza.

4.22. Es así que, para tomar aquí un sólo ejemplo, el *National Council of Teachers of Mathematics* (en abril de 1980), presentando sus *Recommendations for School Mathematics of the 1980s* y considerando como primera recomendación el hecho de que "*la resolución de problemas constituye el foco de las matemáticas escolares en los años ochenta*", se considera obligado a precisar que:

"*Los programas escolares de matemáticas deben proporcionar experiencia a los alumnos en las aplicaciones de las matemáticas, en la selección y adecuación de estrategias a situaciones concretas. Los alumnos deben aprender a*

-formular preguntas claves;

-analizar y conceptualizar problemas;

-definir el problema y el objetivo;

-descubrir pautas y similaridades;

-buscar los datos apropiados;

-experimentar;

-transferir habilidades y estrategias a nuevas situaciones;

-utilizar sus conocimientos de base para aplicar las matemáticas."

La "capacidad de reconocimiento" está aquí formulada explícitamente: "Descubrir pautas y similaridades".*

* N. del T. En inglés en el original.

4.23. *Por debajo del acto de enseñanza*, o paralelo a éste, se encuentra el punto de vista, constituido previamente al de la pedagogía por objetivos, de la *orientación escolar*; su *técnica de los tests* debe permitir evaluar la competencia ("aptitudes", en el antiguo vocabulario; "capacidades", en el actual), a través de la evaluación del desempeño.

4.24. Es por eso que numerosos tests suponen la utilización de la capacidad de "reconocimiento", es decir, del manejo de la *dialéctica semejanza/diferencia*: véase el *Documento Nº1*.

4.25. Numerosas "capacidades" así identificadas quedan fuera del *universo del docente*, especialmente porque no pueden, como tales (es decir, en su generalidad), *constituir el objeto de una enseñanza*. El docente puede entrenar a sus alumnos para reconocer (por ejemplo) una diferencia de dos cuadrados; sin embargo no existe una enseñanza cuyo objeto sea "la dialéctica semejanza/diferencia". Se puede concebir una enseñanza de ese tipo, pero su objetivo no sería la *adquisición* de esa capacidad. Nos enseñaría, por ejemplo las condiciones históricas de emergencia y de racionalización de la dialéctica semejanza/diferencia en el pensamiento occidental, a través del desarrollo de la estadística, etc. En general, si esas capacidades, su adquisición y desarrollo pueden ser eventualmente designados como *objetivos de enseñanza*, éstas no pueden, empero, considerarse parte del conjunto de los *objetos de enseñanza*.

4.26. De todos modos, el ejercicio de tales capacidades no se realiza en la enseñanza sino en *contextos de situación* específicos. O, al menos, sólo puede ser objeto de un reconocimiento (por parte del profesor, por parte del alumno) en esos contextos. Ese reconocimiento está sometido al *filtro de percepción* definido por el *contrato didáctico* y su jerarquía de valores. Para el docente es "interesante" que el alumno sepa reconocer una diferencia de dos cuadrados; le parecerá "matemáticamente carente de interés" que *también* sepa distinguir el conejo intruso dentro de una serie de aves[1] (por supuesto, hay allí un problema de "nivel", pero hay tests análogos mucho menos evidentes, incluso para un adulto...).

4.27. La utilización de las "capacidades" debe pasar, efectivamente, por el *filtro del contrato didáctico*. De ese modo, el alumno que ante la consigna:

"Factorice $4x^2 - 36x$"

respondiera:

"$4x^2 - 36x = 4x^2 - 2\,(2.9)\,x + 9^2 - 9^2$

$=(2x - 9)^2 - 9^2 = (2x - 9 + 9)\,(2x - 9 - 9)$

$= 2x\,(2x - 18)$"

daría una respuesta "falsa" (por dos razones: 1. No ha hecho lo que se esperaba de él; 2. La respuesta "justa" es $4x\,(x - 9)$. De ese modo, habría demostrado:

–*una capacidad poco ordinaria* (si es un alumno de cuarto curso) para reconocer formas algebraicas;

–*una incapacidad para reconocer el tipo de situación-problema* al cual se le ha enfrentado (su comportamiento de respuesta es *no pertinente* en relación con el contrato didáctico tan pacientemente elaborado por el docente).

4.28. Se trata de ese género de obstáculo que he denominado "dificultad protomatemática". Una dificultad de ese tipo puede surgir de la *falta de dominio de una capacidad requerida por el contrato didáctico para su buen entendimiento*. El dominio en cuestión sería entonces un *prerrequisito del contrato didáctico*. Su utilización *pertinente*, en última instancia, sigue estando de todos modos sujeto a las cláusulas del contrato.

4.29. Las nociones protomatemáticas, por ejemplo la noción de "pattern", se sitúan en un nivel *implícito* más profundo (para el docente, para el alumno). Ese carácter implícito se expresa en el contrato didáctico por el hecho de que *estas nociones son obvias* –salvo, precisamente, cuando se produce dificultad protomatemática y *ruptura del contrato*.

4.30. Nociones matemáticas, nociones paramatemáticas, nociones protomatemáticas constituyen estratos cada vez más profundos del funcionamiento didáctico del saber. *Su consideración diferencial es necesaria para el análisis didáctico*: por eso el análisis de la transposición didáctica de cualquier noción matemática (por ejemplo la identidad $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$) supone la consideración de nociones paramatemáticas (por ejemplo, las nociones de *factorización y de simplificación*), las que a su vez deben ser consideradas a la luz de ciertas nociones protomatemáticas (la noción de "patrón", de "simplicidad", etc.).

4.31. A veces es posible llevar una noción de un nivel dado a un nivel superior de explicitación. Es así como (tal cual se ha dicho ya), las nociones paramatemáticas de ecuación o de demostración pueden ser objeto de definiciones precisas en lógica matemática. Es así también como cualquier noción protomatemática puede volverse una noción paramatemática, aflorando a la superficie del discurso didáctico explícito. Por ejemplo, en el estudio de las "identidades notables", ciertos manuales y ciertos profesores, introducen una "fórmula" paramatemática correspondiente al "patrón" protomatemático: véase el *Documento N°2*.

4.32. *Pero hay que destacar especialmente* que, en relación con las ambiciones del análisis didáctico, ese proceso de explicitación reduce el *"sentido" didáctico* de los objetos que transforma y que, por tanto, si puede arrojar luz sobre su significación, es principalmente mostrando que ésta no se reduce, en el sistema didáctico, a lo que puede condensarse en el discurso didáctico o matemático.

4.33. La noción paramatemática de "factorización", tal como funciona en la enseñanza de álgebra en el primer ciclo del secundario, no puede adecuarse a una noción matemática *stricto sensu* (véase Tonelle 1979, capítulo 4, parágrafos 4.1.2). Esta noción sólo tiene sentido en el marco, sobredeterminado e indeterminadoo a la vez (según una observación más general de P. Bourdieu), del código por el cual se diseña una cierta *lógica práctica*. Y, como señala también Bourdieu, "la práctica no implica –o excluye– el dominio de la lógica que en ella se expresa".

5.

Saberes escolarizables y preparación didáctica

5.1. Las distinciones introducidas previamente: nociones matemáticas/nociones paramatemáticas, nociones paramatemáticas/nociones protomatemáticas, que esbozan un *análisis epistemológico* del *régimen didáctico* del saber (en lo que respecta a la enseñanza de las matemáticas), revelan que hay saberes (en sentido amplio: saberes y procedimientos*) que son *aprendidos* sin ser nunca específicamente *enseñados* (si se define el acto de enseñanza como comprensión reflexiva de sus fines y la explicitación de su *intención* didáctica.

5.2. Ocurre que hay saberes enseñables (y enseñados) y saberes no enseñables, o al menos, no escolarizables.

Según Michel Verret (op. cit. pp.146-147),

"una transmisión escolar burocrática supone, en cuanto al saber

1º – la división de la práctica teórica en campos de saber delimitados que den lugar a prácticas de aprendizaje especializadas, es decir, la desincretizacióon del saber.

* N. del T. *Savoir-faire* en el original.

2º – en cada una de esas prácticas, la separación del saber y de la persona, es decir, la despersonalizacióon del saber.

3º – la programación de los aprendizajes y de los controles, según las secuencias razonadas que permitan una adquisición progresiva de los conocimientos expertos, es decir, la programabilidad de la adquisición del saber.

En cuanto a la transmisión, supone:

1º – la definición explícita, en comprensión y extensión, del saber a transmitir, es decir, la publicidad del saber.

2º – el control regulado de los aprendizajes según procedimientos de verificación que autoricen la certificación de los conocimientos expertos, es decir, el control social de los aprendizajes". (Verret, 1975, pp.146-147).

5.3. Esos requisitos muy generales definen al mismo tiempo, por exclusión, los *saberes no escolarizables*. Siempre siguiendo a Verret,

"*esas condiciones, al mismo tiempo que definen el campo de transmisibilidad escolar, definen su campo de intransmisibilidad:*

–serán socialmente no escolarizables

1º – los saberes reservados (saberes esotéricos, saberes iniciáticos), en tanto escaparían a la publicidad.

2º – los saberes aristocráticos, en tanto pretenderían eludir las exigencias de un control social públicamente definido según normas universales que excluyen todo privilegio sectorial.

–serían gnoseológicamente no escolarizables

1º – los saberes totales o con pretensión de totalidad, en tanto oponiéndose a los procedimientos analíticos; sus aprendizajes se resistirían también a las programaciones organizadas y en secuencias progresivas.

2º – los saberes personales, en tanto estarían consustancialmente vinculados con personas, por definición insustituibles.

3º – los saberes empíricos, en tanto su sincretismo los conduce precisamente a la adquisición global y personal, por los medios intuitivos de la familiaridad mimética, sin que se sepa nunca precisamente cuándo se aprende ni exactamente qué se aprende. ¿Sabemos siquiera que aprendemos a hablar, a escuchar, a vestirnos, a hacer bromas?" (Verret, 1975, pp.147-148).

5.4. En la transposición didáctica (de las matemáticas), los requisitos enumerados más arriba, esto es:

– la desincretización del saber;
– la despersonalización del saber;
– la programabilidad de la adquisición del saber;
– la publicidad del saber;
– el control social de los aprendizajes

se encuentran tendencialmente satisfechos a través de un proceso de *"preparación" didáctica* que he denominado la *puesta en texto del saber*.

5.5. *En efecto, por la exigencia de explicitación discursiva, la "textualización" del saber conduce primeramente a la delimitación de saberes "parciales"*, cada uno de los cuales se expresa *en un discurso (ficticiamente) autónomo*. Ese proceso produce una "desintrincación" del saber, o sea su *desincretización*. En particular, el proceso introduce una diferenciación entre *lo que pertenece propiamente* al *campo delimitado* (en este caso, las nociones matemáticas y paramatemáticas) y lo que, implícitamente (pero realmente) presente (en el sincretismo que realiza todo saber en acto), no se identifica formalmente como tal (nociones protomatemáticas). Ese proceso produce además una diferenciación entre aquello que, presente en el texto mismo, constituye el objeto de su discurso (nociones matemáticas), y aquello que, siendo necesario para la construcción del texto, no es su objetivo (nociones paramatemáticas).

5.6. La *conciencia de la delimitación* de saberes parciales independizados (por el proceso de transposición didáctica) está a menudo presente en los *agentes* de la transposición didáctica (en posición de desconocimiento): por eso los autores de manuales justificarán sus "elecciones" (condicionadas por los requisitos estructurales del sistema didáctico) por medio de razones contingentes del tipo "los límites estrechos de la presente obra", "el espíritu de esta colección", etc.

5.7. Contrariamente, la *conciencia de la desincretización* no aparece prácticamente nunca. Por eso los "*prerrequisitos*" son formulados en términos de *elementos de conocimiento* situados por parte del autor como anteriores a las nociones presentadas (en una concepción progresiva legalista del proceso de aprendizaje, sobre la que volveremos más adelante). *A contrario*, se puede jugar con esta situación de falta de conciencia para producir un efecto humorístico, como en el célebre "Modo de empleo" de los *Elementos de matemática* de N. Bourbaki:

"El tratado considera las matemáticas en sus comienzos y proporciona demostraciones completas. Su lectura no supone, pues, en principio, ningún conocimiento matemático particular, sino solamente un cierto hábito de razonamiento matemático y un cierto poder de abstracción".

Por supuesto, el "sincretismo" es traicionado una vez más: para poner en práctica el razonamiento matemático y el poder de abstracción en cuestión, se dan por supuestas situaciones y nociones matemáticas: es decir, conocimientos matemáticos "anteriores".

5.8. Más raramente, la necesaria independización de los saberes parciales se presenta como didácticamente útil. Es así que el autor de un texto de física (Destouches, 1956), escribe en su prefacio:

"Toda teoría física es difícil de comprender correctamente. La mecánica newtoniana de los sistemas de puntos y de sólidos no escapa a esta regla, incluso si se trata de una de las teorías físicas más simples y que ha servido de modelo a todas las teorías posteriores. El espíritu humano no es apto, en efecto, para comprender de entrada toda la complejidad de un movimiento.

...

Una buena manera de abordar el estudio de una teoría física es comenzar por el examen de sus diversas teorías parciales. Ese es el método que hemos seguido; comenzamos por el cálculo vectorial, la geometría de las masas, la cinemática, la cinética. Son teorías parciales fáciles de comprender y que preparan para el estudio de la dinámica (...)" (op. cit., pp.5-6)

5.9. El proceso de explicitación textual del saber (nociones matemáticas) produce correlativamente un efecto que lo hace implícito* (nociones protomatemáticas) que se basa en los prerrequisitos, en tanto no son reconocidos como tales. El efecto de *delimitación* produce además *–hecho esencial desde el punto de vista de la epistemología–* *la descontextualización del saber*, su desubicación de la *red de problemáticas y problemas* que le otorgan su "sentido" completo, *la ruptura del juego intersectorial* constitutiva del saber en su movimiento de creación y de realización. No insistiré aquí sobre ese tema fundamental. Para algunas observaciones generales, véase Chevallard, 1980b.

5.10. La textualización lleva a cabo, en segundo lugar, la disociación entre el pensamiento, en tanto que expresado como subjetividad, y sus producciones discursivas: el sujeto está expulsado fuera de sus producciones; el saber está entonces sometido a una transformación en el sentido de despersonalización. Para hacer aparecer *a contrario* la especificidad de esta posición, citaré –sin estar de acuerdo con él– el punto de vista exactamente opuesto a la "reducción textualista", el de los lógicos *intuicionistas*.

"Las construcciones (mentales) que consideramos son pensadas como existentes en la mente de un individuo matemático (idealizado). El lenguaje de las matemáticas es un intento (por fuerza casi siempre inadecuado) de describir esas construcciones mentales" (Troelstra, 1969, p.4).*

Sin duda alguna, si quieren comunicar algo, los intuicionistas, como todo el mundo, están obligados a realizar la "puesta en texto"...

5.11. La textualización del saber, y la despersonalización que ésta implica, tiende a promover una concepción "positiva" del aprendizaje que, por ejemplo, leerá *el error como "falta", en relación con el "pleno" del texto*. En efecto, en una *"teoría" espontánea del error*,

"la producción del error por parte del sujeto no es un acto positivo que remita a esquemas o representaciones debidamente construidos y, quizás, tenaces –y que las estrategias didácticas del docente deberían procurar desestabilizar y destruir. El error (...) aparece como una simple falta, una laguna del conocimiento. Por ello, el sujeto es negado y sus producciones devueltas a la nada del "presaber". Todo lleva al saber (reducido él mismo a un texto), tanto su presencia como su ausencia. Esta concepción determina además otra consecuencia que no desarrollaremos aquí: cuando, finalmente, se percibe la existencia del sujeto y de su actividad característica en tanto que sujeto cognoscente, se disocia a menudo la actividad intelectual "normal" de la actividad "noble" que es la del "descubrimiento": así se constituye el estudio de la heurística del sujeto como algo separado del resto de los actos de saber. Mediante esta disociación se perpetúa y se legitima retroactivamente la negación del sujeto como productor de sentido: la "heurística" es una ideología de docentes y un artefacto psicológico". (Chevallard, 1978, pp.16-17).

5.12. La *objetivación* obtenida por la puesta en textos del saber es la fuente evidente, además, de la *publicidad* del saber que allí se representa (como opuesto al carácter "privado" de los saberes personales, adquiridos por mimetismo, o esotéricos, adquiridos por iniciación, etc.). Esta publicidad, a su vez, posibilita el *control social de los aprendizajes*, en virtud de una cierta concepción de qué significa "saber", concepción fundada (o legitimada, al menos) por la textualización. Concepción cuya caricatura extrema es el "saber de memoria" como simple psitacismo. *A contrario*, si se suprime el texto, esta concepción perderá toda significación, por desvanecimiento del referente: el texto del saber como norma del saber y de lo que es "saber".

5.13. Pero la puesta en texto autoriza esencialmente aquello que M. Verret designa por medio de la expresión *programabilidad de la adquisición del saber*. El texto *es una norma de progresión en el conocimiento*. Un texto tiene un principio y un fin (provisorio) y opera por encadenamiento de razones. Si se concibe el aprendizaje como equivalente al progreso que manifiesta la estructura propia del texto, éste permite medir a aquél y hace posible una didáctica esencialmente "isomorfa" cuyas escanciones determina. Me parece que debemos partir de ese punto para continuar el análisis: *el texto autoriza una didáctica*, cuya duración desmarca su diacronía y esta didáctica se legitima, entonces, por la ficción de una concepción del aprendizaje como "isomorfo" respecto del proceso de enseñanza cuyo modelo ordenador es el texto del saber en su dinámica temporal.

5.14. Señalemos ahora dos puntos sobre los que aparece la ficción de semejante "teoría" del aprendizaje. El texto tiene un *principio y procede secuencialmente*. Esta afirmación ya deja de ser cierta respecto al saber del que el texto es explicitación discursiva. En efecto, es infrecuente que un saber sea efectivamente *inicializable* y *secuenciable*. Tomemos justamente la intención de Bourbaki: "El tratado considera las matemáticas en sus comienzos", afirma el "Modo de empleo". Sin embargo, no es así en absoluto: este tratado se ocupa cuidadosamente de la *axiomática*, pero las *reglas de inferencia* se mantienenimplícitas: la noción de *razonamiento* no se encuentra *construida*, sino preconstruida (sobre esta noción, véase el capítulo 8). Hay, por tanto, *como ocurre siempre*, algo que está *antes del "comienzo"*; algo que puede resultar pertinente para explicar lo que pasa "después" (por ejemplo, las "crisis" en la historia de las matemáticas). La misma empresa fracasa igualmente en la *secuenciación de las matemáticas*: por más "objetivo" que sea un saber, no es verdad que pueda "explicarse" de la A a la Z. *A fortiori*, es muy necesario que el proceso de aprendizaje sea *secuencial*: pero el orden de aprendizaje no es isomorfo en relación con el orden de exposición del saber; *el aprendizaje del saber no es el calco del texto del saber*: volveremos ampliamente sobre este punto más adelante.

6.

El texto del saber y la estructura del tiempo didáctico

6.1. *La producción de un sistema didáctico* a partir de un *proyecto social de enseñanza* previo supone la producción de un *texto del saber*, y esta puesta en textos del saber engendra los efectos previamente mencionados (desincretización, despersonalización) al tiempo que posibilita una *relación específica con el tiempo didáctico* (programabilidad de la adquisición del saber).

6.2. Esa *relación saber/duración* es el elemento fundamental del *proceso didáctico*. La puesta en texto del saber, previamente realizada, permite que se establezca esa relación: es más, el "texto" debe entablar una relación particular (según exigencias que consideraremos) con la duración y el tiempo didácticos. El proceso didáctico existe como *interacción de un texto y una duración*.

6.3. A través de las notas precedentes (explicitadas más adelante) deseo subrayar en primer lugar la *especificidad*, ya mencionada (capítulo 3, punto 17), del *funcionamiento didácti-*

co, de su propia naturaleza irreductible sin mediaciones, al funcionamiento "laico" del saber correspondiente en la "comunidad académica". En ésta, en efecto, el *motor del avance* (de la progresión) en la *construcción del saber*, está constituido, *en última instancia*, por los *problemas* que se encadenan y se reproducen, produciendo una *historia intelectual* de la comunidad académica en la que aparecen. Los problemas, decía Bachelard, son el nervio del progreso científico. Una *investigación* se presenta así, como una sucesión de carambolas, donde un problema *resuelto* (o provisoriamente *abandonado*) lleva a *formular y resolver* otros problemas. En este sentido, el *proceso de enseñanza* difiere fundamentalmente del *proceso de investigación: en el primero, los problemas no son el motor de la progresión*. Esta está constituida por una cierta *contradicción antiguo/nuevo*.

6.4. Antes de desarrollar esa cuestión, destaquemos la existencia de dos actitudes diferentes, de intenciones opuestas, que se originan ambas en el desconocimiento del rol *principal* de la contradicción antiguo/nuevo y del carácter *secundario* del rol que desempeñan los problemas en el proceso didáctico. Por un lado, nos encontramos con el *olvido de los problemas*: es el caso general, en el que el *"curso"* se reduce a ser un simple *discurso*; por otro lado y como reacción contra lo que es más un *estado de hecho* que el efecto de una actitud intencional, tenemos las tentativas que procuran *restituir un rol central a los problemas* en la enseñanza de las matemáticas. Esas tentativas se encuadran generalmente en una perspectiva de restauración de una praxis matemática "auténtica" en el seno del proceso de enseñanza. De allí puede resultar que se conciba la transposición didáctica de manera reduccionista, como un calco fiel al espíritu de dicha praxis y simplificado, sin adulteraciones, a partir de la observación y del análisis del funcionamiento del saber *"in vivo"* (cf. 3.16).

6.5. En el primer caso hay un abandono de los problemas, es decir, en definitiva, de la praxis matemática. En el segundo caso, hay una equivocación con respecto a las condiciones de posibilidad de una solución didáctica al *problema de los problemas* subordinada a la contradicción principal, motor del proceso de enseñanza. Volveré sobre estas cuestiones más adelante.

6.6. ¿Como funciona entonces la contradicción antiguo/nuevo en el proceso de enseñanza? Para que un objeto de saber pueda integrarse como objeto de enseñanza en ese proceso, es preciso que su introducción, en un determinado momento de la duración didáctica, lo haga aparecer como *un objeto con dos caras, contradictorias entre sí*. Por una parte (es el primer "momento", la primera "cara") debe aparecer como algo *nuevo*, que produce una apertura en las fronteras del universo de los conocimientos ya explorado; su novedad permite que se establezca, al respecto, entre enseñante y enseñados el *contrato didáctico*: puede constituirse en *objeto de una enseñanza y campo de un aprendizaje*. Pero por otro lado, en un segundo momento de la dialéctica de la enseñanza, debe aparecer como un objeto antiguo, es decir, que posibilita una identificación (por parte de los alumnos) que lo inscribe en la perspectiva del universo de conocimientos anteriores. En un sentido, ese reconocimiento se halla necesariamente mistificado (en caso contrario, el objeto no tendría el carácter de novedad): es la expresión subjetiva de la contradicción objetiva cuyo soporte es el objeto introducido.

6.7. El objeto de enseñanza produce pues un "equilibrio" contradictorio *entre pasado y futuro*: es un *objeto transaccional* entre pasado y futuro.

6.8. ¿Cómo evoluciona la contradicción antiguo/nuevo? Normalmente, o mejor dicho normativamente, esa contradicción es *superada* en el *éxito del aprendizaje*. Pero puede producirse un *bloqueo* de la dialéctica, sin verdadera superación. ¿Qué debe entenderse por ello? En realidad, la superación de la contradicción no puede medirse en términos cuantitativos de "éxito en el aprendizaje": en todo proceso didáctico hay *una tasa residual de fracaso* que no es subestimable en términos absolutos. Pero existe, inscripto en el contrato didáctico, un "umbral" bajo el cual la tasa de fracaso será considerada "satisfactoria", es decir, expresión de la superación de la contradicción antiguo/nuevo. El mero análisis empírico del éxito y del fracaso no sirve, por tanto, para juzgar si ha habido bloqueo o superación. La enseñanza de un objeto de enseñanza se termina generalmente mucho antes de que la tasa de fracaso haya bajado a cero (pensemos por ejemplo en la multiplicación de los enteros en la escuela primaria). En realidad, la situación de bloqueo debe ser diagnosticada cuando el objeto introducido, demasiado "nuevo", en la medida en que tiende a suscitar una tasa de fracaso demasiado elevada, es desnaturalizado (mediante procedimientos diversos, entre los cuales ocupa un lugar notable la *algoritmización*) para atenuar su carácter de "novedad" y es acentuada su relación de continuidad con los conocimientos "antiguos". El resurgimiento ulterior, con su novedad no reducida, del objeto así integrado en la duración didáctica, producirá una caída brutal del éxito, proporcionando al enseñante una *variable de control en disminución* sobre la tasa de éxito. Empleando esa variable, el docente podrá reafirmar su lugar específico en aquello que he denominado la *topogénesis* didáctica del saber. En esas circunstancias, un objeto presentado muy anteriormente podrá seguir siendo terriblemente "nuevo": para los alumnos de nuestras *Terminales A*, la regla de tres permanece indefinidamente en esta categoría. Se reconoce allí un caso de bloqueo.

6.9. Se puede decir que la superación de la contradicción antiguo/nuevo, a propósito de un objeto determinado, equivale al envejecimiento de ese objeto: los objetos de enseñanza son víctimas del *tiempo didáctico*, están sometidos a una erosión y a un desgaste "morales", que presuponen su *renovación* en el curso de un ciclo de estudio. Podemos dar el nombre de *obsolescencia interna o relativa* a ese fenómeno de desgaste dentro de *un ciclo de enseñanza*, para oponerlo a la obsolescencia *externa o absoluta*, relativa a la sociedad en general (sobre la obsolescencia absoluta, véase el capítulo 7). La renovación se realiza en función de la estructura particular de la dialéctica antiguo/nuevo, que produce esa renovación: de ese modo se instituye la estructura del tiempo didáctico, o más precisamente (para eliminar una ambigüedad eventual), del *tiempo de la enseñanza* (por oposición al *tiempo del aprendizaje*), cuya versión consciente, intencional, es proporcionada, en el nivel de la *administración del acto de enseñanza*, por la *progresión* establecida en los programas, los manuales, las "progresiones" que proponen los profesores y el IPR.

6.10. Al definir el tiempo de la enseñanza en su estructura propia, la dialéctica entre lo antiguo y lo nuevo, trabajando sobre los saberes textualizados, organiza una duración didáctica que llegará a ser un *modelo de temporalidad dominante* en la representación de las temporalidades (sin embargo) diferentes (como se subrayará en el capítulo 8) que coexisten y se compenetran sin igualarse jamás completamente, en el sistema didáctico. Es el modelo legalista de una duración *progresiva, acumulativa* e *irreversible* (en el sentido en que si bien puede perderse –y justamente el propósito de los *"recordatorios"* es restituirla en su originaria lozanía– no puede modificarse). El efecto de esta duración didáctica así instituida no es la creación de un tiempo del aprendizaje "isomorfo" que sería su duplicación subjetiva en cada alumno. El tiempo "legal" de la enseñanza tiene como efecto fundamental el de *interpelar a cada "enseñado concreto" como "sujeto didáctico"*. Frente a ese tiempo que se le impone, el sujeto didáctico postula su subjetividad y su "historia" personal; es interpelado y debe, en cierto sentido, responder según la estructura de una temporalidad subjetiva particular que se define en el marco progresivo del tiempo de la enseñanza, sin identificarse de todos modos con éste.

7.

El tiempo de la enseñanza como ficción: cronogénesis y topogénesis

7.1. En la *relación didáctica* (que une enseñante, enseñados y saber) el *enseñante* es el servidor de la máquina didáctica cuyo *motor* es la contradicción entre lo antiguo y lo nuevo: alimenta su funcionamiento introduciendo allí los objetos transaccionales que son los objetos de saber convenientemente convertidos en objetos de enseñanza. El es quien debe "sorprender" continuamente si quiere cumplir con su función, mantener su "lugar". El efectúa la reprogramación del reloj didáctico para evitar la obsolescencia interna que produciría la detención del tiempo, o al menos su retardo o su extenuación.

7.2. El docente es, por tanto, aquel que sabe antes que los demás, el que *ya* sabe, el que sabe "más". Esto le permite conducir la *cronogénesis del saber*. Esa es, estrictamente, la condición que le permite llevar a cabo la renovación didáctica: es la condición mínima. Si esa situación de avance cronológico, siempre destruida (por el aprendizaje), siempre reconstruida (por la enseñanza, es decir, por la introducción de nuevos objetos transaccionales) se estructurara según el eje temporal único de un tiempo progresivo, acumulativo e irreversible, existiría una identificación –aunque en asincronía cronológica– del tiempo de la enseñanza y del tiempo del aprendizaje: *la ficción de un tiempo didáctico único se tornaría realidad.*

7.3. En el *Discurso del método*, comentando los cuatro preceptos "para gobernar correctamente la razón y buscar la verdad en las ciencias", Descartes invita al lector a considerar

"que, no habiendo sino una verdad para cada cosa, quienquiera la hallare sabría de ella todo lo que se puede saber; y que, por ejemplo, un niño que conociera la aritmética y que hubiera realizado una adición conforme a las reglas, podría estar seguro de haber encontrado, en cuanto a la suma que examinaba, todo aquello que el espíritu humano puede encontrar."

Sin embargo, esta afirmación no es verdadera: o al menos no lo es sino en tanto que el "niño" en cuestión no es *interpelado como sujeto didáctico a través de su sujeción a la dinámica temporal de la relación de enseñanza.* Si aceptamos, provisionalmente, la idea de que la grieta temporal del retraso, siempre ahondada, tiende siempre a ser rellenada y que, en lo que respecta a conocimientos *anteriormente* enseñados, el alumno puede saber tanto como el maestro (que, por definición, posee un saber adicional *en espera de ser enseñado*), el maestro se distingue igualmente del alumno en cuanto al eje temporal de la relación didáctica, *porque es capaz de anticipar*: el alumno puede dominar perfectamente el pasado –admitámoslo, al menos por un instante– *pero sólo el maestro puede dominar el futuro.* El enseñado puede aprender; el enseñante puede saber lo que el enseñado puede aprender. Cuando se establece una relación de enseñanza, el profesor no sólo se constituye en un "supuesto saber" sino también en un "*supuesto anticipar*".

7.4. La distinción del *enseñante* y del *enseñado* se afirma por lo tanto específicamente, no en relación con el saber *sino en relación con el tiempo como tiempo del saber*: el despliegue temporal del saber en el proceso didáctico ubica *como tales a enseñante y enseñados*, en un mismo movimiento, en sus *posiciones respectivas* y sus relaciones específicas *con respecto al antes y al después* (con respecto a la anticipación). Ya incluso en ese sentido se distinguen el tiempo de la enseñanza, en el que es esencial la anticipación, y el tiempo del aprendizaje, en el que se operan ciertos tipos de retroacciones (véase el capítulo 8), *dado que manifiestan distintas relaciones con la duración.*

7.5. Veremos que la distinción se realiza de otras maneras. Enseñante y enseñado ocupan distintas posiciones en relación con la dinámica de la duración didáctica: difieren en sus relaciones respectivas con la *diacronía* del sistema didáctico, con lo que podemos denominar la *cronogénesis. Pero también difieren según otras modalidades*: según sus *lugares* respectivos en relación con el saber en construcción, en relación con lo que podemos llamar la *topogénesis* del saber, en la *sincronía* del sistema didáctico.

7.6. Ese problema fue identificado (especialmente en Francia, durante los años sesenta) con el nombre de "relación enseñante/enseñado". En una perspectiva heredera de las concepciones norteamericanas de la *New Education**, floreciente en los EE.UU en la década del cincuenta, en la que los contenidos del saber se encuentran desvalorizados y más o menos vaciados (especialmente los saberes "sabios"), los análisis desarrollados en esta dirección se han apoyado en una concepción que hace derivar el conjunto de relaciones entre enseñantes y enseñados –como especificaciones de *una esen-*

* N. del T. En inglés en el original.

cia única del poder– de una investidura, realizada de una vez y para siempre, en "roles" antagónicos, a partir de lo cual se explicarían enteramente todos los acontecimientos dentro de la clase: el profesor sería el Amo, el Padre, el Patrón y a esta figura del poder, el alumno respondería como esclavo, hijo, explotado. Este tipo de "explicaciones" no explica nada, sino que, contrariamente, exige una aclaración.

7.7. En las fronteras del sistema educativo pueden producirse casos límites en los que la relación didáctica, pervertida, se degrade en los términos brutales de la dialéctica amo/esclavo: algunas veces podemos encontrarnos con esos casos en las crónicas judiciales. Pero no constituyen la regla: un profesor de física, por ejemplo, que se presentara en un anfiteatro precedido de una enorme reputación (hagámoslo premio Nobel del año para ilustrar mejor el ejemplo), lograría sin duda mucho público y suscitaría gran entusiasmo y fervor. Si dedicara su primera clase al paralelogramo de las fuerzas, el público, bien predispuesto hacia él, supondría que se trata de una estratagema didáctica y confiaría en que su héroe, partiendo de allí, acabaría elevándose audazmente por senderos originales que revelan la genialidad hacia temas más profundos. Pero si, en la segunda clase, el presunto "gran físico" repitiera las mismas cuestiones, su reputación no lo ayudará en nada y tendrá que poner mil cerrojos a las puertas para conservar su público. Ocurre que la exigencia que el enseñante recibe del enseñado es: "¡Asómbreme!" El docente tiene la responsabilidad de poner el movimiento en marcha cada vez. Deberá asegurarse los medios para lograr su *hegemonía* si no desea caer en las bajezas de la *coerción* (para emplear la terminología de Gramsci).

7.8. En realidad, en lugar de estar fundado de una vez y para siempre por la eficacia decisiva de una instancia única (la Institución, el Diploma, etc.), el "poder" no existe sino como efecto *de una red siempre renovada de "poderes" concretos*. En este sentido, este tipo de análisis ha podido progresar gracias a los trabajos de M. Foucault. Por un lado, "el poder supone una multiplicidad de micropoderes concretamente realizados. *Conviene pues buscar los 'engranajes' y la 'mecánica' del poder*, analizando sus 'eslabones más débiles'" (según los términos del propio Foucault). Nada se ha hecho en ese sentido en el tipo de análisis mencionado en 7.6.: en verdad, el examen minucioso de la mecánica del poder quedaba fuera del alcance de ese enfoque, puesto que esos análisis practicaban, por decisión ideológica (y sin duda también por necesidad), el *olvido de los contenidos* y la devaluación sistemática de su importancia como *desafíos y herramientas* en la economía del sistema de enseñanza. Por otra parte, para intentar comprender los mecanismos del poder, ha sido preciso que modificáramos nuestra concepción misma del poder: mientras que en la concepción habitual el poder es esencialmente considerado como *censor* (es la instancia que dice "no"...), Foucault ha puesto de relieve *la productividad del poder*, basada en un conjunto complejo de recorridos y medios. El poder del docente en su clase no consiste en prohibir (más precisamente, en *prohibir* de manera *directa*) la respuesta $16x^2 - 4 = 2\ (8x^2 - 2)$, sino al contrario, en *producir* la respuesta $16x^2 - 4 = (4x + 2)\ (4x - 2)$. Su poder consiste menos en designar las respuestas "malas" que en suscitar la respuesta correcta, que designa implícitamente las otras respuestas como malas.

7.9. Para que el poder del docente sea reconocido en la clase, ese poder debe reafirmarse siempre y la hegemonía que él manifiesta debe descender constantemente a los niveles más concretos de realización: solamente se trata de poder cuando es llevado (porque es probado) *por actos concretos de poder* al plano mismo de *los contenidos específicos de saber*. Puesto que no solamente el docente, que se supone sabe y anticipa, debe mostrar que puede conducir la cronogénesis didáctica, afirmando así su poder en la diacronía, sino que incluso, en sincronía, afirma el carácter singular de su propio lugar en la construcción del saber: no conforme con saber más y programar el futuro, él sabe *de otro modo*. El saber del enseñado y el saber del enseñante no difieren exclusivamente *en el plano de la cantidad*. La transposición didáctica tiende a organizar *cualitativamente* la diferencia de los lugares: tiende a instituir dos "maneras" de saber, a producir dos registros distintos de actos epistemológicos. Así, una vez que la transposición didáctica opera sobre los objetos a enseñar, según la diferenciación empirista entre el "dato" y la "teoría", el alumno se encontrará del lado de la empiria, de la "comprobación", de la "verificación", de la "aplicación", etc. Al maestro le será reservada la teoría. Así tenemos lo que el maestro enseña y más precisamente lo que el maestro debe enseñar y la *manera* en que debe hacerlo y por otro lado, lo que el alumno debe saber y *cómo* debe saberlo. En ese punto, conviene notar que los dos registros en las cuales, a cada instante, se especifica la diferencia de los lugares del enseñante y el enseñado se inscriben en el detalle del contrato didáctico. Es por eso que, en la dicotomía del saber expresado por la distinción de lo numérico y lo algebraico, el alumno tendrá que "verificar" (mediante cálculos numéricos), el profesor "inferirá la ley general" (literal), luego el alumno "aplicará" esa ley a casos particulares (numéricos, más raramente parcialmente literales), etc. La *transgresión* de los registros de actos epistemológicos así separados, la infracción de ese *código epistemológico* es infrecuente, incluso si es posible o "fácil" de hacer: el enseñante, salvo excepción

("Ejemplos" del curso) no realizará verificación numérica –la verificación numérica queda totalmente reservada al alumno. En sentido contrario, se ha observado (véase Tonelle 1979) que el alumno no se permitirá crear un radical ($\sqrt{\ }$) prerrogativa ésta explícita y exclusivamente atribuida por él al profesor.

7.10. Esta no identidad entre el saber del enseñante y el saber del enseñado se manifiesta en la enseñanza de las matemáticas mucho más que en otras materias de enseñanza. ¿Acaso porque sencillamente se produce en ese tipo de enseñanza más que en otras? Por ejemplo, la prueba de composición francesa no parece diferenciar al alumno del profesor más que en el plano de la cantidad: en relación con el texto producido por el profesor (el que se le reclama, por ejemplo, en el concurso de la agregación*), el texto del alumno supone un "menos": menos largo, menos rico en ideas, con menos estilo, vocabulario y... más errores de ortografía. Pero no parece que el alumno conciba su prestación como de diferente naturaleza de la del profesor. Al contrario, en matemáticas, el saber del profesor es diferente: o más precisamente *el lugar del profesor en relación con el saber* es otro, irreductible al del alumno, en relación con la calidad. En la clase de matemáticas, los lugares son insustituibles: si bien puede practicarse a veces, no se concibe el intercambio.

7.11. El doble régimen del saber en la clase crea una situación original: existe el saber enseñado y existe el saber a aprender o mejor dicho "*a saber*". Entre ambos, se da una *heterogeneidad por naturaleza*: así, el profesor *"hará" la teoría* de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas con parámetro; el alumno deberá *resolver* tal o cual sistema.

* N. del T. Se refiere al examen para ingresar en el cuerpo de profesores permanentes de la enseñanza pública.

La dicotomía de los lugares y su realización didáctica *supone una dicotomización del objeto de saber*: una versión para el enseñante, una versión para el enseñado. La coexistencia y la articulación de esas dos versiones crea lo que podemos llamar una *situación transaccional*: entre la versión oficialmente enseñada y la versión cuyo conocimiento se exige del enseñado. El objeto de enseñanza ha sido visto como *objeto transaccional entre pasado y futuro* (en la cronogénesis); ahora se muestra como *objeto transaccional entre los dos regímenes didácticos del saber* (en la topogénesis). De esta exigencia que subyace a la transposición didáctica va a surgir un conjunto de limitaciones sobre la posibilidad de enseñar los saberes y su preparación didáctica; e igual que en la "transaccionalización" entre pasado y futuro, en la "transaccionalización" entre los dos regímenes epistemológicos, la *algoritmización* es una respuesta posible y frecuente.

7.12. La repartición en dos registros de los actos epistemológicos relativos a un mismo objeto de saber (comprobar/demostrar, demostrar/verificar, generalizar/aplicar, etc.) produce una diferenciación cualitativa de los lugares (del enseñante y de los enseñados) que comporta un cierto *juego cuantitativo*: un poco más o un poco menos de teoría; o de aplicaciones numéricas, etc. A través de ese juego cuantitativo, evidentemente relativo, el docente *tiene una posición* respecto a la situación didáctica del saber a enseñar que le aporta la *conciencia* de su *pericia*, de su lugar de poder en la relación de enseñanza: pero se trata de una conciencia *mistificada*, en la que su percepción del control de variaciones de amplitud débil *en la frontera* de los lugares topogenéticos, se produce junto con el desconocimiento de esa diferenciación en tanto determinada estructuralmente, *independientemente del enseñante*. Ese desconocimiento proyecta la *diferencia, discreta*, de los registros de las tareas epistemológicas en la construcción didáctica del saber, sobre *el eje continuo del "nivel de los alumnos"*, según un movimiento de reducción que, olvidando la estructura (fijada) en provecho de sus variaciones (relativamente controlables), es efectivamente *pertinente para el enseñante*. Los "libros del docente" dan testimonio de esto último:

En cada una de estas lecciones se alternan justificaciones y comprobaciones numéricas. Según el nivel de la clase, se puede acentuar uno u otro de esos dos aspectos. (Libro del docente del *Manual Magnard de cuarto curso*, p. 17: el destacado es mío).

No podemos ni desdeñar los logros ya realizados ni demostrar todas las adquisiciones: se impone una elección. Esta depende esencialmente del nivel y de las capacidades de los alumnos. (Libro del profesor del *Manual Hachette de cuarto curso*, coll. M, p. 7: el destacado es mío).

En relación con la primera de las citas, se notará que no parece necesario precisar cuál de los aspectos debería desarrollarse: la conclusión es obvia.

7.13. Volvamos a Descartes: Respecto a la adición, ¿el alumno sabe tanto como el maestro (aquí y ahora), si sabe hacer adiciones? A decir verdad, Descartes afirma solamente: "En cuanto a la suma que examinaba". Pero de todos modos, se trata de un caso particular, en cuanto a que el objeto cuyo conocimiento se supone es la "versión para el alumno" de un objeto de saber, la adición, reducido al *algoritmo* de la adición (en la escritura decimal de los enteros) que constituye aquí la forma transaccional del objeto de saber correspondiente. Existe así una identidad de saber en relación con esta versión didáctica del objeto de saber denominado "adición". ¿Dónde situar, por lo tanto, la diferenciación de los lugares? Quizás, si el maestro es muy erudito, sabe *por qué* el número obtenido por el algoritmo de la adición es justamente la *suma* de dos números dados. Pero eso no basta para asegurar la topogénesis: en efecto, la diferenciación de los lugares *debe manifestarse en el tratamiento explícito del saber*. No debe simplemente existir en la mente del docente bajo la forma de un saber adicional no introducible en el nivel del plan de estudios en cuestión (veamos otro ejemplo: si el profesor ha realizado estudios los suficientemente avanzados en matemáticas, puede saber justificar la prueba del 9; sin embargo, no puede presentar esta justificación a sus alumnos). En realidad, pueden producirse situaciones históricas en las que, en relación con un determinado objeto a enseñar, la transposición didáctica aceptada hasta entonces ya no permita fundar la topogénesis del saber en la relación didáctica: se produce una disminución e incluso una anulación de la distancia entre los lugares del enseñante y el enseñado. En ese caso, el objeto de enseñanza ha sufrido lo que yo denominé un fenómeno de obsolescencia *externa*, o *absoluta*, es decir, que ha envejecido no en relación con la duración de un ciclo de enseñanza (se trata en ese caso de la obsolescencia interna, que funda el tiempo didáctico) *sino en relación con la duración histórica*.

7.14. Ese *envejecimiento histórico* de los objetos de enseñanza tiene dos aspectos: por un lado, no permite mantener adecuadamente la distinción entre los lugares didácticos; por otro lado, llegado el caso, *en relación con la sociedad* (los padres, los contribuyentes, etc.), no permite en adelante marcar la diferencia entre el saber "lego" y el saber de los "sabios", lo que tiende a erosionar la *legitimidad social del proyecto de enseñanza*, en tanto el envejecimiento afecta a sus objetos. Cualquier padre (o casi) podría sustituir al docente en su tarea de enseñanza si no fuera por una cuestión material de tiempo disponible. Obviamente, los dos aspectos están vinculados:

los padres son antiguos alumnos... Para detener el envejecimiento histórico de los objetos de enseñanza, *se produce una renovación histórica de esos objetos*: ¿el alumno sabe tanto como el maestro en relación con la adición? Pues bien, la introducción de los *operadores* modificará la situación y el "sacrificio" que el docente tenga que aceptar para aprender los operadores (o las bases, etc.) le será devuelto en términos de incremento de prestigio, que es, de hecho, una *necesidad funcional* tanto dentro de la clase como fuera de ella. Siempre algo nuevo (crogénesis), y siempre *un poco por encima* del "nivel" del alumno (topogénesis): ésa es la necesidad del sistema didáctico. En ciertos trabajos sobre la multiplicación de los enteros se han podido comparar, desde el punto de vista del "rendimiento" escolar, dos algoritmos diferentes: nuestro algoritmo actual, llamado "a la italiana" y un algoritmo más antiguo, hoy olvidado, el método *per gelosia**. Ese segundo algoritmo es incomparablemente más confiable que el primero (no hay que retener en la memoria –"llevarse"– resultados de agrupaciones parciales). Además, parece que su aprendizaje se puede realizar en pocas horas, contra .... los varios años que demanda el método a la italiana. Pero justamente ese algoritmo es "demasiado simple": si lo sustituyéramos por el algoritmo actual *toda la economía del sistema didáctico se modificaría* (no digo que esa sustitución no sea posible, ni deseable; subrayo solamente su carácter no anodino; y del mismo modo, tampoco digo que los autores citados tuvieran ese objetivo en mente: véanse los trabajos mencionados...) Ya en el siglo XV, el método *per gelosia* se presentaba como demasiado simple y así en un tratado de aritmética para comerciantes sólo se le consagraba unas pocas líneas,preliminares, antes de pasar a cosas más serias (véase *Documento Nº3*).

* N. del T. En italiano en el original. Suele traducirse como "por celosía".

8.

El tiempo de la enseñanza como ficción: preconstrucción y posterioridad

8.1. La topogénesis del saber, en la relación didáctica, responde en sincronía a la diferencia de relaciones con el tiempo didáctico del enseñante y de los enseñados. ¿Por qué designa como *ficción* el tiempo didáctico instituido por la cronogénesis? Porque lleva a cabo una *situación transaccional* que enmascara la *falta de respeto* de la norma temporal instituida por la dialéctica antiguo/nuevo. Veremos de qué manera.

8.2. ¿En qué sentido no se respeta la norma temporal definida *por el tiempo de la enseñanza*? ¿De qué manera *el tiempo del aprendizaje* desmiente *el tiempo didáctico oficial*? En principio, antes de proseguir con esta cuestión, debemos notar que *la ficción del tiempo didáctico instituido no se presenta espontáneamente al enseñante* como tal: ficción (como vamos a mostrarlo), pero ficción *necesaria, funcionalmente necesaria* para el proceso didáctico. Estamos aquí delante de un caso en el que el *desconocimiento de las condiciones reales de desarrollo de un pro-*

ceso por parte de sus agentes (los enseñantes) constituye per se *una condición de ese proceso*: el enseñante debe creer, de alguna manera, en la ficción de la duración didáctica que él programa. Deberá interpretar en registros explicativos diferentes, que no invaliden la norma del modelo de temporalidad al que sirve el docente, los fenómenos que puedan interponerse a su clara conciencia del tiempo que debe utilizar. Esos registros van desde el psicologismo de las calificaciones escolares y de los comentarios brutales del tipo "alumno perezoso", "desatento", "lento", etc., al psicologismo más elaborado, sentenciosamente *ad hoc* (es la "tipología" de los "*slow learners*"*, etc.) de una cierta *education research**.

8.3. Esa es la razón por la cual la puesta en evidencia de una distorsión de la norma temporal a partir de la realidad de los aprendizajes *emana sólo excepcionalmente de la instancia enseñante propiamente dicha*: surge de una mirada que enfoca la relación didáctica de un punto cercano pero exterior: mirada que hace surgir la "inadaptación" del sistema didáctico y que sustenta a partir de esa constatación una determinada voluntad de reforma; mirada guiada por el análisis científico (didáctico) y que pone en claro, eventualmente ante su propia perplejidad, esta distorsión. Del primer punto de vista procede, por ejemplo, la comparación provista (en 1951) por una investigación realizada entre 30.000 alumnos de la ciudad de Los Angeles: al final del ciclo de enseñanza secundaria, 1 alumno de cada 7 (con edades desde los 16 a los 18 años) no sabía calcular el 50% de 36 (citado en Hofstadter, 1963, p. 304). Una vez "establecido científicamente" el hecho, podemos ofrecer comentarios adicionales: yo puedo dar testimonio, por ejemplo, del hecho de que los estudiantes de segundo año de la universidad, a quienes he debido enseñar las sutilezas del χ^2 y de la *t* de Student, se equivocan *mayoritariamente* (a la primera ocasión) al calcular el porcentaje correspondiente a 12 por 87..., por ejemplo. El enseñante debe, en esos casos, cerrar los ojos para no comprometer *el avance de su curso*: decididamente a los estudiantes "les falta base"... Las observaciones que podemos encontrar –un ejemplo, entre otros– en un trabajo sobre las "estructuras multiplicativas" surgen de otro tipo de perspectiva. Los autores escriben, especialmente:

* N. del T. En inglés en el original.

"*La enseñanza de las matemáticas en el primer ciclo del segundo grado supone que están adquiridas nociones y procedimientos que en realidad no son asimilados por los niños al final de la enseñanza elemental y cuya adquisición lleva un largo período que se prolonga a veces hasta el final de la adolescencia*". (Vergnaud, *et al.* 1979, I, p. 1)

Estudiando los conocimientos de los alumnos de sexto curso en relación con las "estructuras multiplicativas" elementales, esos mismos autores anteponen a la presentación de sus resultados (capaces de sorprender y desalentar a los docentes), un comentario que procura evitar interpretaciones y pasos al acto demasiado precipitados:

"*Los resultados, que parecerán un poco brutales a ciertos lectores, no deben llevarnos a una actitud pesimista del tipo: "¡Entonces para qué! Si todos los alumnos de sexto curso no saben siquiera resolver problemas elementales" (...) Sería un grave error imputar la responsabilidad por las lagunas observadas a la reforma de la enseñanza de las matemáticas y creer que un simple recurso a métodos anteriores permitiría llenar esas lagunas (...) El objetivo de este artículo no es, por tanto, dar fundamento a la corriente que busca retornar a ciertas didácticas caducas, sino por el contrario alentar a los docentes e investigadores a marchar resueltamente hacia adelante.*" (Vergnaud *et al.* 1979, II, pp. 2-3).

8.4. Podemos preguntarnos cómo el sistema de enseñanza se maneja con esos hechos patentes que niegan su temporalidad. Ya lo hemos dicho; es cuestión de la *transacción*, que realiza la *autorregulación* del sistema didáctico. Esta autorregulación debe ser analizada *en cada caso específico* (ligado a contenidos de saber específicos). Ya indiqué más arriba un medio general de negociación, *la algoritmización*. Veremos luego otro medio general ligado a las situaciones de preconstrucción. Demos un ejemplo simple de autorregulación: diversos estudios han mostrado que hasta que ingresan a la escuela secundaria, un porcentaje no despreciable de alumnos no saben mencionar ningún número comprendido entre 2,16 y 2,17 (para tomar un ejemplo). En particular, esos alumnos escribirán que

$]2;\ 2{,}17\ [\Omega]\ 2{,}16;\ 4\ [= \emptyset$.

En los manuales, encontramos ejercicios del tipo:

"Determinar el conjunto S de los reales que satisfaga las siguientes desigualdades :

$a < x < b$ y $c < x < d$"

pero no encontraremos nunca o casi nunca la situación considerada más arriba: no se "mezclan" las "dificultades" (véase el *Documento Nº4*).

8.5. El tiempo didáctico legal se impone como una norma al enseñante. Es sorprendente que esa norma se imponga, como hemos visto hasta aquí, no solamente como una aceleración, como guía del progreso didáctico sino también como un freno: al preguntar a un profesor que enseña en sexto (11-12 años) y quinto curso (12-13 años) sobre un ejercicio de un tipo no abordado en ese nivel (pero "ejecutado" muy correctamente por un alumno de ... tercer grado (8-9 años)) (véase el *Documento Nº5*) cuál era su opinión sobre en qué nivel podría proponerse ese ejercicio, recibí como respuesta que sería

aceptable en quinto y no en sexto, a causa de la presencia de una "elevación al cuadrado". En sexto, los alumnos no saben calcular los cuadrados; *las potencias no están en el programa*, sólo trabajan con cuadrados para realizar cálculos de áreas. Se ve aquí que la normalización, impuesta por el tiempo didáctico legal a la aprehensión de la temporalidad de los aprendizajes, *se apoya en la delimitación del saber que resulta de la puesta en texto que funda el tiempo didáctico* (por medio de la dialéctica antiguo/nuevo): la elevación al cuadrado es espontáneamente pensada en el cuadro de las "potencias", *unidad significante mínima del programa*. En el análisis de la transposición didáctica y del tiempo didáctico, singularmente, no hay que olvidar ese hecho fundamental estudiado anteriormente: la reducción de los saberes a un texto.

8.6. Lo recientemente expuesto hace aparecer el tiempo didáctico legal, el tiempo de la enseñanza, como una ficción *que prohíbe desvíos en la duración*, tanto si se trata de avances como de retrasos. Esta instancia designa una norma dinámica que define el ritmo del avance didáctico y en relación con la cual, como ocurre con toda norma, los desvíos (temporales) son percibidos como simples faltas (retrasos) o son, más radicalmente, escotomizados (avances). Queda por aprehender esa misma realidad a la que el tiempo legal se impone como norma: la pluralidad de los *tiempos del aprendizaje* y la *estructura particular de esa duración* que no se adapta a la duración legal en relación con la cual, sin embargo, se define y sitúa.

8.7. Para explorar el *tiempo del enseñado* en su estructura particular, podemos partir de una cuestión planteada por la existencia de lo que hemos llamado la topogénesis: si existen dos regímenes del saber, articulados en sincronía según mecanismos transaccionales, para permitir la ficción del tiempo didáctico legal ¿cómo, un buen día, se puede convertir un alumno sometido siempre al registro epistemológico que define su lugar de enseñado, en un profesor de matemáticas (para elegir una pregunta ingenua)? Si el tiempo del aprendizaje fuera verdaderamente el tiempo simplemente progresivo, acumulativo, que fija la dinámica de enseñanza, eso no sería posible: el saber así acumulado sería una estratificación de capas de saber *cada vez más arcaicas*, que se verían remontándose temporalmente en la historia didáctica del sujeto. Pero contrariamente este fenómeno se percibe cuando en efecto, *hay arcaísmos*: es así que, al preguntar a estudiantes de matemáticas (y lo mismo ocurriría sin duda con profesores debidamente recibidos), a propósito de "qué es la regla de 3", las respuestas mostraron que esa noción no se había vuelto a trabajar desde la escuela primaria (en la época en que 6 lapiceras costaban 18 francos, una lapicera costaba 3 francos y 10 lapiceras costaban 30 francos...).

8.8. El problema que acabamos de plantear corresponde con lo que en la historia de las ciencias se ha podido designar con el nombre de "refundación" o "reelaboración". No me parece que el problema se haya formulado verdaderamente porque estaba resuelto en forma ficticia de entrada por el modelo del tiempo legal. En cuanto a la psicología, además, parece que el problema ha sido evitado si tenemos en cuenta dos restricciones de los estudios realizados: estudios de aprendizajes "cortos", por un lado; estudios de esquemas (de su génesis, evolución, conexiones, etc.) más que "contenidos de saber" particulares, por otra parte. Correlativamente da la impresión de que la psicología cognitiva ha sido poco sensible a la existencia de una transposición (cualquiera que fuere), apoyándose sobre una versión normativa y normalizada (adulta, actual, etc.) de los contenidos de saberes, en los que estudia la adquisición (por ejemplo, se estudiará la adquisición de los "productos cartesianos", etc.) sin preocuparse demasiado por el fundamento epistemológico de las nociones que examina. Si la temporalidad de la psicogénesis constituye un progreso en relación con el modelo didáctico del tiempo, sustituyendo una duración simplemente *acumulativa* por un sentido *integrador* (en el que cada estructura integra la precedente como estructura subordinada), sobre todo mediante el juego del mecanismo de equilibración (que comporta realmente un aspecto retroactivo), lo cierto es que la psicogénesis no deja de plantear una temporalidad irreversible, mientras que el *tiempo del enseñado* parece estar constituido también por *reorganizaciones* que anulan las representaciones anteriores para reinsertar los materiales en construcciones inéditas.

8.9. Existe un modelo diferente de temporalidad en el que la plasticidad de la duración autoriza retornos reorganizadores de tipo radical: es el concepto freudiano de posterioridad. Se trata, según escriben J. Laplanche y J. B. Pontalis, de una:

> *"Palabra utilizada frecuentemente por Freud en relación con su concepción de la temporalidad y de la causalidad psíquicas: experiencias, impresiones y huellas mnémicas son modificadas ulteriormente en función de nuevas experiencias o del acceso a un nuevo grado de desarrollo. Entonces pueden adquirir, a la par de un nuevo sentido, una eficacia psíquica."*
>
> (Laplanche y Pontalis, 1973, p. 33; p. 280 de la traducción al español).

Para insistir en el carácter determinante de ese concepto, reproduzco también algunas líneas más de los autores citados:

"Ante todo, este concepto impide una interpretación sumaria que reduciría la concepción psicoanalítica de la historia del sujeto a un determinismo lineal que tendría en cuenta únicamente la acción del pasado sobre el presente. Se suele reprochar al psicoanálisis el reducir el conjunto de las acciones y deseos humanos al pasado infantil; esta tendencia se habría ido agravando con la evolución del psicoanálisis, los analistas se remontarían cada vez más lejos: para ellos, todo el destino del hombre estaría decidido desde los primeros meses de la vida o incluso ya en la vida intrauterina...

Ahora bien, desde un principio Freud señaló que el individuo modifica con posterioridad los acontecimientos pasados y que es esta modificación la que le confiere un sentido e incluso una eficacia o un poder patógeno."

(Laplanche y Pontalis 1973, pp. 33-34, p. 280 de la traducción al español).

8.10. Parece evidente que la importación del concepto de posterioridad al análisis didáctico, aplicado a las reorganizaciones *cognitivas*, es sumamente iluminador. Permite, por ejemplo, percibir una categoría de fenómenos que el enseñante tiende espontáneamente a escotomizar, porque para él son extremadamente frustrantes y que, a causa de su modelo temporal de interpretación, sólo puede considerar como manifestaciones horriblemente patológicas. Daré un ejemplo personal (para que nadie se sienta ofendido): para enseñar la noción de *distancia* y sus aplicaciones en diversos campos extramatemáticos a estudiantes de ciencias humanas, elegí como punto de partida y "motivación", explicar que si, para tres individuos A, B, C, dispongo del dato de *un sólo* carácter numérico X, o sea que de (X_A, X_B, X_C) puedo decir que A "se parece más" a B que a C (por ejemplo), *en el sentido del carácter estudiado*, si $|X_A - X_B| < |X_A - X_C|$; pero que si dispongo de *dos* caracteres numéricos X e Y, esos dos caracteres *pueden estar en desacuerdo* sobre los "parecidos" relativos de A con B o C (podemos tener $|X_A - X_B| < |X_A - X_C|$ pero $|Y_A - Y_B| > |Y_A - Y_C|$).

De donde el uso de la noción de distancia, por ejemplo: $d(A, B) = |X_A - X_B| + |Y_A - Y_B|$ etc.; hay varias funciones de distancia posibles, de lo cual surge cierta arbitrariedad, lo que no impide tratar de construir distancias mejor adaptadas a tal o cual problema particular, etc. De esas consideraciones pasamos al estudio de distancias cada vez más sofisticadas (distancia de χ^2, distancia de Mahalonobis, etc.) y llegamos al final del minicurso. Así fue como en ocasión de un ejercicio de precontrol (es decir, anterior al control oficial, o sea el examen..), dos estudiantes que tenían que comparar individuos (disponían de tres datos numéricos para cada uno de ellos según diversas distancias) llaman al docente para expresarle su asombro: comparar según *una* característica, sí; pero según dos o tres, ¡eso no es posible! Gran azoramiento del docente: ¡retomar todo, partir de cero! ¡Esos estudiantes acababan de comprender el punto de partida de toda la enseñanza realizada durante varias semanas!

8.11. Ese diagnóstico, perturbador para el enseñante, es falso. No todo debe retomarse. Porque precisamente *"todo" es retomado en ese instante*. El modelo freudiano puede aportar algunas precisiones al respecto:

"1) Lo que se elabora retroactivamente no es lo vivido en general, sino electivamente lo que en el momento de ser vivido no pudo integrarse íntegramente a un contexto significativo (...).

2) La modificación con posterioridad viene desencadenada por la aparición de acontecimientos y situaciones (...) que permiten al sujeto alcanzar un nuevo tipo de significaciones y reelaborar sus experiencias anteriores." (Laplanche y Pontalis, 1973, p. 34, p. 281 de la traducción al español).

Si hacemos funcionar esos principios en el marco del análisis didáctico, nos procuramos los medios para pensar "lo impensable" (para el enseñante) y para plantear de otro modo *el problema de la enseñanza misma.*

8.12. Dicho problema ha sido formulado por algunos de nosotros, en términos de elaboración de *situaciones* y de *series de situaciones* apropiadas para la construcción de tal o cual concepto (cuya adquisición se procura). En la medida en que hagamos depender ese proyecto de una *concepción lineal* del tiempo, nos condenamos a intentar respetar condiciones realmente insostenibles, proponiendo una definición demasiado rígida de los procesos didácticos, concebidos según el modelo dominante de una flecha temporal irreversible. La construcción de una teoría adecuada de las situaciones supone un cambio de temporalidad o más bien la *asunción del problema de la articulación entre muchas temporalidades no isomorfas.*

8.13. La necesidad de reorganizaciones, de retomar "las adquisiciones" anteriores a la luz de experiencias ulteriores puede situarse como formando parte *de la actividad propia* del sujeto. La enseñanza tiende a proveer al alumno de "respuestas" a preguntas *que él no se formula* (si han sido formuladas por el enseñante); *la actividad de apropiación* consistiría entonces en elaborar preguntas, en formularse implícitamente *la pregunta de las preguntas, y la actividad del enseñante* consistiría por un lado en crear situaciones que favorezcan la actividad cuestionadora, como zonas de elaboración que autorizan la asunción (por parte del alumno) de la dinámica temporal instituida. Según una profunda observación, "*El intelectual es aquel que convierte las respuestas en preguntas*". (Hofstadter, 1963, p. 30).*

* N. del T. En inglés en el original.

Pero en realidad, según otros ritmos, la reelaboración es una necesidad que tiende *a la construcción misma del saber*, más exactamente a lo que hemos llamado su *preconstrucción*.

8.14. He tomado la palabra *preconstrucción* –sino el concepto, en su exacta medida– de la *teoría de los discursos*, tal como la elaboran M. Pêcheux, Paul Henry, etc. (la noción misma fue introducida por P. Henry). Este préstamo estuvo motivado por las dificultades del análisis del tratamiento didáctico de ciertos conceptos matemáticos (los de polinomio y número real) en la enseñanza del primer ciclo (para el concepto de polinomio, véase Tonelle 1979). En realidad, el estado de preconstrucción parece ser exactamente *el componente de base de nuestra ontología y de nuestra representación espontáneas del mundo*; pero si ese componente *existe en la construcción científica de lo real, también existe* (pero, en un momento dado de la historia del saber se impone, de manera mucho más pregnante) *en la construcción didáctica* del saber y desempeña un papel esencial y *específico* en la economía del sistema didáctico.

8.15. Para "hacer ver" con más claridad el tipo de fenómeno designado aquí como relativo a la preconstrucción, tomaré primero mis ejemplos, no de la vida cotidiana o de la construcción didáctica del saber, sino de la *historia de las matemáticas*. En su *curso de análisis* de 1821, Cauchy demuestra así *el teorema de los valores intermedios*:

"*Una propiedad notable de las funciones continuas de una sola variable es poder servir para representar en geometría las ordenadas de líneas rectas o curvas. De esta observación se deduce fácilmente la siguiente proposición:*

Teorema IV. Si la función f(x) es continua en relación con la variable x entre los límites x = x0 ,x = X y si se designa como b una *cantidad intermedia entre f(x0) y y f(X), se podrá satisfacer siempre la ecuación f(x) = b por uno o muchos valores reales de x comprendidos entre x0 y X.*

Demostración. Para establecer la proposición precedente, basta con hacer ver que la curva que tiene por ecuación y = f(x) cortará una o varias veces la recta que tiene por ecuación y = b en el intervalo comprendido entre las coordenadas que corresponden a las abscisas x0 y X; ahora bien, es evidentemente lo que ocurrirá en la hipótesis admitida".

Para nosotros, esta demostración no es una demostración. Los términos sintomáticos de su insostenibilidad son "hacer ver"[1] y "evidentemente" indican que se recurre a una evidencia gráfica que actualmente ya no aceptamos, por lo menos entre los matemáticos –es diferente cuando el matemático se hace profesor. La ausencia de demostración "real" es aquí contemporánea de *la ausencia del concepto de continuidad*. Pero *las ausencias se encadenan*: lo que falta también es el *concepto de número real*. Se produce una *"circulación de la carencia"*. Además, con anterioridad, Bolzano había proporcionado una demostración correcta del teorema de los valores intermedios (en su gran memoria de 1817), apoyándose en el "criterio de Cauchy" (enunciado por Bolzano muchos años antes que Cauchy), que él consideraba haber demostrado "por un razonamiento que, en ausencia de toda definición aritmética del número real, no era ni podía ser sino un círculo vicioso"[2]. Es preciso notar en relación con esto, que si en ese momento, falta (no está construido) el concepto de número real, se cuenta en cambio *con una definición correcta de la continuidad*. Pero la ausencia del concepto de número real debilita el funcionamiento de la noción de continuidad: implica la ausencia del *concepto* de continuidad. Y de paso se notará que una "definición correcta" no basta para hacer un concepto: éste sólo adquiere existencia en el marco de un *sistema de conceptos* en el cual como se ha visto se practica una activa "solidaridad de la carencia". La ausencia misma del concepto de continuidad es aquí solidaria de la *ausencia del concepto de curva* (cuya intuición se seguirá inmediatamente de la noción de continuidad surgida a partir del ejemplo de la curva de Peano).

8.16. Esta "economía de la carencia" sólo es viable a condición de que existan importantes limitaciones: exige no aventurarse fuera del dominio en el que la carencia se elimina como tal, no corresponder a ninguna "necesidad" (veremos más adelante los efectos didácticos de ese tipo de situación). Por ejemplo, la ausencia del concepto de número real en el siglo XIX (o al menos que aparece tardíamente), permite otra "confusión", la de la *continuidad* y la *derivabilidad* (a través de la intuición geométrica de la *curva*). Ya no se trata de una laguna en la demostración sino de un resultado erróneo. Ese "error" no es problemático en la medida en que uno se limita a considerar las funciones continuas que son de hecho derivables (y aún más). El error se impone entonces, en el campo restringido de la práctica matemática en la que se ha instalado como evidente, en tanto que *equivocación* (en el sentido propio del término): así, en su curso en la Ecole Polytechnique (publicado en 1815) Poinsot declara que:

"Podemos inclusive decir que la relación entre dos cosas homogéneas que no depende ni de su naturaleza ni de sus magnitudes absolutas, por la definición misma de esa relación, la cantidad (Dy : Dx) tiene siempre el mismo límite; y esto es lo que la consideración de una curva y de su tangente, cuya existencia está fuera de toda sospecha, hace ver por otra parte con la mayor evidencia."

(Citado en Delachet 1961, p. 56).

8.17. Debemos preguntarnos cuál es el estatuto de esos "objetos" (función continua, curva, etc.) cuyo concepto está ausente. Lo que acabamos de afirmar permite percibir un cierto número de características de ese estatuto: el objeto no está construido sino *presentado* por una *deixis* que es una *llamada a la complicidad* en el reconocimiento ontológico; la existencia del objeto se presenta ahora como evidente, sin dudas, más justamente, como *no susceptible de duda*; el objeto está instalado, por la mostración que lo designa en su existencia obstinada, en un estado que elude el cuestionamiento, porque todo cuestionamiento se da por supuesto: es un punto de apoyo inatacable de la reflexión. Cuando reflexiono sobre el mundo sensible que me rodea (con vistas a actuar sobre él, por ejemplo), no pongo en duda su existencia obstinada, opaca: esa pared, esta puerta, mi mano que escribe. Lo mismo ocurre en la vida intelectual, colmada de preconstrucciones. En un texto escrito hacia el final de su vida, *De la certitude* (*Über Gewissheit*), Wittgenstein realiza una profunda reflexión que, creo, podemos vincular ampliamente con nuestro tema: se puede recurrir a ella con gran interés (Wittgenstein, 1976).

8.18. La preconstrucción designa sus objetos mediante el lenguaje. Ese *aspecto lingüístico es fundamental*, especialmente porque posibilita la deixis, explícita ("esta puerta", etc.) o implícita, mediante el mecanismo de la *aposición*, a título de *presuposición*. Pero el lenguaje funciona aquí de un modo muy particular. La preconstrucción se establece efectivamente por el *cruce de enunciados del lenguaje y de situaciones sobredeterminadas*. Esos enunciados son enunciados asertivos: mi saber en preconstrucción me permite decir que esas plantas son tréboles, porque yo sé que en ese lugar del jardín, en esa época del año, siempre hay —siempre ha habido— tréboles; mi saber está estrechamente subordinado a una situación

estrechamente definida; en otro jardín, que no conozco, dudaría: "¿Se trata de tréboles o de otra cosa?" Mi saber está estrechamente ligado a un contexto; no tolera la descontextualización. Mientras que el *saber científico* —el del botánico, para este caso— *se traduce tanto en aserciones como en negaciones*: sin conocimiento empírico de las plantas, podría concluir que "no son tréboles", *con la planta en la mano*. Lo preconstruido se aleja por lo tanto del saber científico, porque depende absolutamente del contexto, porque es absolutamente *no descontextualizable*. En la otra cara de la moneda, *a la preconstrucción se opone la algoritmización* (como reducción del saber a algoritmos): en ese último caso, *se produce una ruptura entre enunciados y situaciones* (de manera que el problema didáctico esencial se refleja en la pregunta: ¿*qué* enunciados son pertinentes para *qué* situaciones?). Entre esas dos figuras extremas del saber (preconstrucción, algoritmización), *el saber científico se plantea como dominio de la dialéctica entre enunciados y situaciones* (dialéctica que supone a su vez la independización de los enunciados en relación con las situaciones, lo que la opone al estatuto de la preconstrucción, y *el establecimiento de relación pertinente* de los enunciados y de las situaciones, lo que la opone a la algoritmización). Pero es preciso insistir de todos modos sobre el hecho esencial de que, en un momento dado, *cualquier saber científico funciona sobre un estrato profundo de preconstrucción*.

8.19. Ocurre que simplemente no lo percibimos en la actividad científica "corriente", salvo precisamente cuando se produce una "crisis" (crisis de los irracionales, de los conjuntos, etc.). Entonces, al evolucionar las condiciones de la práctica, la capa profunda de evidencias sobre la que se basaba el edificio resulta afectada, no sin resistencias psicológicas: "¿Cómo nos ha podido engañar hasta tal punto la intuición?", decía Henri Poincaré[3]. Se hace acuciante la necesidad de una *refundación, de una reelaboración del saber anterior*, cuya preconstrucción ya no es suficiente, porque la evolución de las condiciones de la práctica teórica ha puesto en evidencia su fragilidad, su ineptitud para dar lugar a un cuestionamiento científico. Pero en el trayecto de lo preconstruido a lo construido siempre permanece algo: cuando emprende la tarea de construir los números reales, Dedekind apela explícitamente al *Libro V* de los *Elementos* de Euclides y precisa claramente que su objetivo es pedagógico.

"*Nunca he creído haber dado a luz, en mi obra, a un sólo fenómeno nuevo o a un sólo objeto nuevo de la investigación matemática*". (Dhombres, 1978, p. 219).

8.20. Lo mismo ocurre en la enseñanza de las matemáticas. Pero las preconstrucciones deben ser estudiadas en ella de manera específica, *porque la economía de la transposición didáctica no reproduce la economía del saber "sabio"*. En la enseñanza del primer ciclo, por ejemplo, hay preconstrucción solidaria (por lo tanto, una falta de conceptos solidaria) de las nociones de *polinomio* y de *real*. Doy un sólo ejemplo de las consecuencias de este estado de cosas: un alumno de tercer curso podrá decir que la función de $x^3 - x$ es una función polinómica, porque para él una función polinómica es *eso* (algo que adopta esa forma). Dirá también, por ejemplo, que $\sqrt{x}$ no es una función polinómica, porque no es una función polinómica... Su saber está hecho de elementos yuxtapuestos, inorganizables en un todo coherente porque cada elemento sólo vale en una situación determinada. La función definida por:

$$
\begin{array}{ll}
\sqrt{x}\,(x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) & \text{si } x > 0 \\
\sqrt{-x}\,(-x\sqrt{-x} - \frac{1}{\sqrt{-x}}) & \text{si } x < 0 \\
-1 & \text{si } x = 0
\end{array}
$$

no es para él una función polinómica: su noción de función polinómica puede constituir el objeto de aserciones, no de cuestionamientos.

8.21. La manipulación de preconstrucciones está sometida a una lógica práctica, definida por un código de *conducta no explicitable*. O más exactamente *que sólo es eficaz en no ser explicitado*: para cada situación particular el código define una conducta particular, sin que se pueda trazar el listado de esas conductas. Una lista semejante supondría la posibilidad de aislar los elementos de su contexto –pero éstos sólo poseen eficacia cuando están inmersos en situaciones en las que son pertinentes; supondría la posibilidad de descontextualizar los elementos de saber que esa lista debería juntar– pero los contextos son aquí esenciales para conferir sentido. Para un ejemplo de esos intentos condenados al fracaso, véase el *Documento Nº6*.

8.22. El saber tratado en preconstrucción, según la lógica implícita de un código de conducta, es por lo tanto un saber frágil, *sin vigor*, porque depende del contexto de situación, *no tolera la variación*. Para acceder a un estatuto que le permita formar parte de una actividad teórica en la que pueda ser puesto en discusión, deberá ser retomado, refundado, *construido*, sin que *lo preconstruido* deje de existir en nuestro saber: lo preconstruido es la manifestación –eventualmente arcaizante– del pasado (de nuestro saber pasado) en el seno del presente. La estructura necesaria del saber desmiente la ficción de una duración simplemente progresiva del tiempo de la construcción del saber.

Documentos

A continuación se reproducen los documentos del texto, sin traducir las expresiones de los idiomas en que aparecen, con el fin de respetar la intención del autor de presentarlos como actividades escolares cuya significación didáctica se presenta en esta obra.

Documento 1

Una escala colectiva de nivel individual

Tomado de:

Maurice Reuchlin, *Psychologie*, PUF, Paris, 1977, pp. 255-257.

DOCUMENT 4-15

Une échelle collective de niveau intellectuel

D'après P. Bénédetto. Échelle collective de niveau intellectuel,
in *Enquête nationale sur le niveau intellectuel des enfants d'âge scolaire*,
INED, Travaux et Documents, n° 54, Paris, PUF, 1969.

Le cahier I est destiné aux cours préparatoires ; le II aux cours élémentaires ; le III aux cours moyens ; le IV au cycle d'observation.

Exemples de questions :

VOCABULAIRE (exemple tiré du cahier II) :

Je souligne le mot qui complète les phrases :

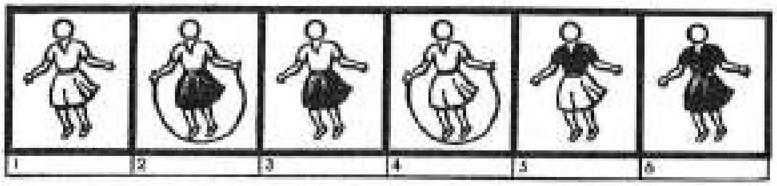
Le .... garde ses moutons sur la verte colline

1 – fermier 2 – berger 3 – gardien 4 – métayer 5 – bouvier 6 – paysan

COMPRÉHENSION DE PHRASES (exemple tiré du cahier II) :

« Aline saute à la corde, elle porte une jupe noire »

Faites une croix sous le dessin qui représente Aline.



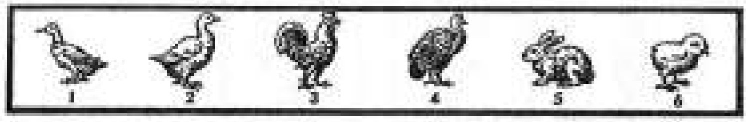
UN ÉLÉMENT DIFFÉRENT :

a. *Forme non verbale* (exemple tiré du cahier III) :

Dans chaque bande, composée de six dessins, cinq dessins se ressemblent d'une certaine manière.

Un seul est différent.

Vous devez entourer d'un cercle le chiffre qui correspond à ce dessin.



b. *Forme verbale* (exemple tiré du cahier II).

Je souligne le mot qui ne va pas avec les autres :

1 – Henri 2 – Gaston 3 – François 4 – Denise 5 – Alain 6 – Paul

SÉRIES CROISSANTES (exemple tiré du cahier III) :

On vous donne une série de nombres arrangés d'une certaine manière.

On vous demande de trouver, parmi les groupes de deux nombres proposés sur la deuxième ligne, celui qui continue la série, c'est-à-dire qui complète les cases vides.

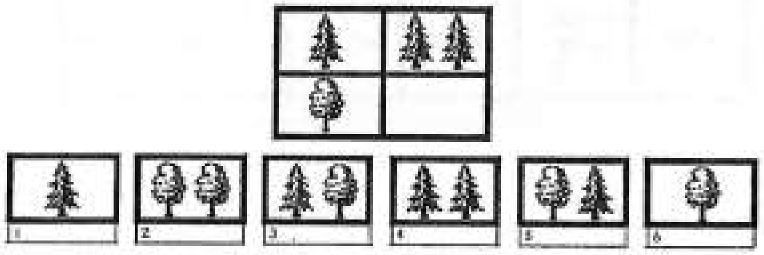
1	2	3	4	5		

A	B	C	D	E	F
5 7	5 6	6 7	6 8	4 5	5 8

MATRICES :

a. *Forme non verbale* (exemple tiré du cahier II).

Je fais une croix sous le dessin qui vient remplir la case vide.



b. *Forme verbale* (l'épreuve prend ici le nom d'*analogies verbales*) (exemple tiré du cahier II).

Je souligne le mot qui remplace les points.

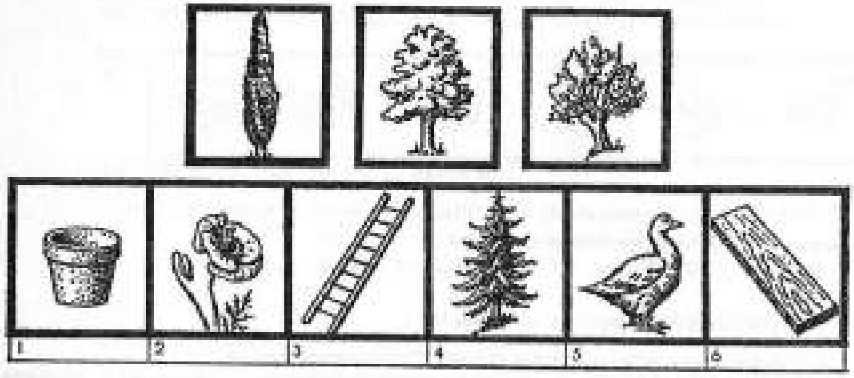
la cerise — le cerisier
la pomme — ....

1 – la cerise 2 – la poire 3 – la pêche
4 – le pommier 5 – le cerisier 6 – l'arbre

APPARTENANCE A UNE CLASSE :

a. *Forme non verbale* (exemple tiré du cahier I).

Faites une croix sous le dessin qui fait partie de la même famille que les dessins du haut.



b. *Forme verbale* (exemple tiré du cahier II).

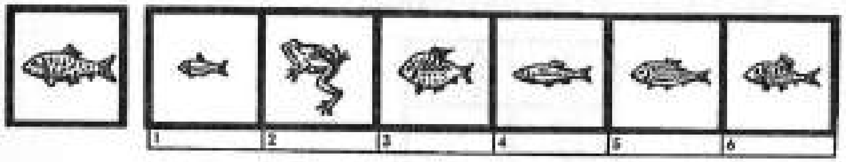
Je souligne le mot de la deuxième ligne qui va avec les trois mots de la première ligne.

François Jacques André

1 – Monique 2 – Jacqueline 3 – fillette 4 – Alain 5 – garçon 6 – homme

DIFFÉRENCES (exemple tiré du cahier II).

Je fais une croix sous le dessin qui ressemble le moins au dessin qui est dans le cadre tout seul.



Documento 2

Pattern (patrón) y fórmula

Tomado de:

1) E. Galin, *Mathématique 4e*, OCDL Hatier, Paris (non paginé).

2) Jéomatri, *Mathématique en 3e*, Ophrys, Gap, 1980, pp. 44-46.

3) *The Mathematics Teacher*, 72, 7 (octobre 1979), pp. 517-518.

1) Galion 4e édition 1975

FICHE 55

Polynomes : Produits et factorisations

① a) Voici deux polynomes en y :

$A(y) = -3y^2 \qquad B(y) = 4y + 7$

$A(y) \times B(y) = (-3)y^2 \times (4y + 7)$

$A(y) \times B(y) = \underbrace{(-3)y^2 \times 4y} + \underbrace{(-3)y^2 \times 7}$

×	$4y$	7
$(-3)y^2$	$-12y^3$	$-21y^2$

Complète :

$A(y) \times B(y) = \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots$

Tu obtiens un polynome.

b) Voici un troisième polynome en y : $C(y) = 5y^2 - 2y - 3$

$B(y) \times C(y) = (4y + 7)(5y^2 - 2y - 3)$

Développe ce produit.

Pour cela, tu peux utiliser le tableau ci-contre après l'avoir complété.

Donne une écriture réduite de $B(y) \times C(y)$.

×	$5y^2$	$(-2)y$	(-3)
$4y$		$(-8)y^2$	
7			(-21)

Le polynome obtenu est appelé produit des polynomes $B(y)$ et $C(y)$.

c) Voici deux autres présentations du calcul de $B(y) \times C(y)$:

	y^3	y^2	y^1	y^0
$C(y)$		5	-2	-3
$B(y)$			4	7
		35	-14	-21
	20	-8	-12	
$B(y) \times C(y)$	20	27	-26	-21

$$\begin{array}{r} 5\,y^2 + (-2)\,y + (-3) \\ \times \qquad\qquad + y + \quad 7 \\ \hline 35\,y^2 + (-14)y + (-21) \\ 20y^3 + (-8)y^2 + (-12)y \qquad\qquad \\ \hline 20y^3 + \;27\,y^2 + (-26)y + (-21) \end{array}$$

Conclusion : $B(y) \times C(y) = 20y^3 + 27y^2 - 26y - 21$

② a) $D(u) = u^2 + 3 \qquad E(u) = 3u - 7 + 2u^2$

Écris sous forme réduite le polynome $D(u) \times E(u)$: le polynome $D(u) \times D(u)$

b) Développe, réduis et ordonne chacun des produits suivants :

$(2z - 1)(z + 5) \qquad (y + 3)(y + 3)$

$(a + 1)(a - 1) \qquad (u - 2)(u + 3)(u^2 - 1)$

③ Pour développer $(3x + 5)(3x + 5)$, qui s'écrit aussi $(3x + 5)^2$, il est plus rapide d'utiliser le moule « carré-d'une-somme » :

$$(\bullet + \blacktriangle)^2 = \bullet^2 + 2\bullet\blacktriangle + \blacktriangle^2$$

Complète : $(3x + 5)^2 = \ldots$

Développe et ordonne chacun des produits suivants :

$(x + 9)^2 \qquad (x^2 - 1)^2 \qquad (-3u + 5)^2 \qquad (-2 - t)^2$

④ Pour développer le produit $(3x - 5)(3x + 5)$, tu peux utiliser le moule « différence-de-deux-carrés » :

$$(\bullet + \blacktriangle)(\bullet - \blacktriangle) = \bullet^2 - \blacktriangle^2$$

Complète : $(3x + 5)(3x - 5) = \ldots$

Écris plus simplement les produits de polynomes :

$(t + 4)(t - 4) \qquad \left(\frac{2}{3}y - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}\right) \qquad (x^2 - 9)(x^2 + 9)$

⑤ a) $p(u) = (4u^2 - 12u)(u + 7)$

Développe et réduis le polynome $p(u)$.

$4u^3 + 16u^2 - 84u$ est une *forme développée* du polynome $p(u)$

$(4u^2 - 12u)(u + 7)$ est une *forme factorisée* de ce même polynome.

b) Factorise le polynome $4u^2 - 12u$. Utilise ce résultat pour donner une autre factorisation du polynome $p(u)$

Factoriser un polynome, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

⑥ Tu as remarqué que, pour factoriser un polynome, les trois propriétés suivantes sont souvent utilisées :

Quels que soient les réels a, b, c, d :		
$ab + ac = a.(b + c)$ $ab + ac - ad = a(b + c - d)$	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

⑦ Factorise les polynomes suivants :

$8u^2 + 16u \qquad 25x^2 + 30x + 9 \qquad u^2 - 16$

$3x^2 + 27x + 18 \qquad u^2 + 9 - 6u \qquad 16 - 25a^2$

$a(a^2 + 6) + 4(a^2 + 6) \qquad -70t + 49t^2 + 25 \qquad (x + 4)^2 - 49$

⑧ **Exercice**

a) Après avoir factorisé $u^2 - 1$ et $3u + 3$, factorise le polynome $F(u)$ défini par

$F(u) = u^2 - 1 - (u + 1)(2u - 1) + (3u + 3)$

b) $G(x) = 3(x - 1)(x + 1) + 4(x^2 - 1)$

$H(x) = 4x^2 + 9 - 12x - (2x - 3)(x + 1)$

Écris chacun de ces polynomes sous la forme d'un produit de deux polynomes.

Résous dans R l'équation $H(x) = 0$

III – OÙ L'ON CALCULE AVEC DES LETTRES.

3.1 Puissances.

Soit x un réel.

Rappelle ce que signifient les notations x^2, x^5 *et* x^7. *Justifie l'égalité* $x^2 \times x^5 = x^7$.

Donne une autre écriture de $x^3 \times x^2$; $x^{11} \times x^7$; $x^4 \times x^1$; $x \times x^8$; $-5x^4 \times 8x$; $-0{,}5x^3 \times (-4x^2)$; $4x^7 \times 0{,}25x^{13}$; $\sqrt{2}x^3 \times \sqrt{2}x^4$; $\frac{3}{4}x^5 \times (-\frac{14}{5}x^2)$; $\frac{6}{7}x^4 \times \frac{7}{6}x^4$; $(5x)^3$; $(-4x)^2$.

3.2 Écritures réduites.

Soit x un réel.

1. *Réduis les expressions suivantes.*

$6x^2 + 9x^2$; $3x - 12{,}6x - 11{,}9x$; $-6 + 3x^2 - 8x + 10x + x^2$; $4x^2 + 3x^4 - 6x - 8x^2 + 10x + 3x^2 + 5 + 6x^4 - 1$.

2. *Donne une écriture plus simple des réels* $7x^2 - 9x^2$ *et* $7x^2 \times (-9x^2)$.

3. *Réduis les expressions suivantes.*

$(7 - 2x - 4x^2 + 5x^3) + (5x + 3x^4 - 8x^3)$; $(3x^2 - \frac{x}{2} + \frac{5}{7}) - (\frac{2x^2}{3} - \frac{2x}{3} - \frac{2}{7})$; $(x - 2x^2 + 4x^3 - 3x^5) - (5x^5 + 7x^2 - 2x^3 + 1) + (-3x + 4x^4 + 6x^3)$; $(3 - x - 5x^2) - (-6 - 2x + 3x^2) + (-7 - x + 6x^2)$.

3.3 Développements.

Soit a un réel.

1. *Développe les expressions suivantes.*

$6(2 + 6a - 7a^2)$; $5a(3a^2 - 2a - 5)$; $-3a^2(-a^4 + 2a^2)$; $(5a^2 + 0{,}25a - 1)(-4a)$.

2. *Développe et réduis les expressions suivantes.*

$6(a - 3) - 1{,}5(a + 4) - 0{,}4(a - 2) + 6(0{,}5 - a)$;

$3(a^2 + 3a - 5) - 7(-3a^2 + 2a - 1) + 5(3a^2 - 4a + 2)$;

$4a^2(3a - 2) - 3a^2(2 + 3a^2) - 6a(-a^2 + 2a^3)$.

3. *Développe et réduis les expressions suivantes.*

$(a - 7)(3a + 1)$; $5(2a - 3)(-6a + 6)$; $(3a^2 - 2a + 1)(5 - 3a)$; $(-6a^3 - 3a^2)(1 + 2a + 6a^2)$; $(6a^4 - 2a^2 + 9)(2a^2 - 3a - 1)$.

4. Dans $\mathbb{R}$

$$(\square + \bigcirc)^2 = \square^2 + 2\square \times \bigcirc + \bigcirc^2 ;$$
$$(\square - \bigcirc)^2 = \square^2 - 2\square \times \bigcirc + \bigcirc^2 ;$$
$$(\square - \bigcirc)(\square + \bigcirc) = \square^2 - \bigcirc^2.$$

Voici un exemple d'utilisation de la première de ces propriétés.
Soit u un réel. On se propose de développer $(3u + 7)^2$.

$$(\boxed{3u} + 7)^2 = \boxed{3u}^2 + 2 \times \boxed{3u} \times 7 + 7^2.$$

Tu sais que $(3u)^2 = 9u^2$, que $2 \times 3u \times 7 = 42u$ et que $7^2 = 49$.
Donc $(3u + 7)^2 = 9u^2 + 42u + 49$.

Soit x un réel.

Développe et réduis les expressions suivantes : $(x + 3)^2$; $(2x + 7)^2$; $(0{,}3 - 1{,}2x)^2$; $(1 - x)^2$; $(x - 2)(x + 2)$; $(\frac{1}{3} - x)(\frac{1}{3} + x)$; $(3x + 4)(3x - 4)$.

5. Soit a un réel. Considérons l'expression $(4a - 3)(2a - 1) - (3a + 5)(5a - 7)$.
Nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned}(4a - 3)(2a - 1) - (3a + 5)(5a - 7) &= [(4a - 3)(2a - 1)] - [(3a + 5)(5a - 7)],\\ &= (8a^2 - 4a - 6a + 3) - (15a^2 - 21a + 25a - 35),\\ &= (8a^2 - 10a + 3) - (15a^2 + 4a - 35)\\ &= 8a^2 - 10a + 3 - 15a^2 - 4a + 35,\\ &= 8a^2 - 15a^2 - 10a - 4a + 3 + 35,\\ &= -7a^2 - 14a + 38.\end{aligned}$$

Développe et réduis les expressions suivantes.

$(2a - 5)(3a + 7) - 5(2a^2 - 1)$; $2a - 5(3a + 7) - 5(2a^2 - 1)$; $(a^3 + 3a^2 - 4)(2a - 1) - (a + 1)(5a^2 - 7)$; $(11a + 1)(2a - 3) - (a - 3)(a + 3)$.

3.4 Factorisation.

1. Soit x un réel.

Factorise.

$14x - 21$; $10x^2 - 25x + 5$; $22 + 33x^2 - 55x^4 + 11x^6$; $x^4 + 7x^3$; $x - x^3 + x^4$; $9x^2 + 18x$; $48x^2 - 30x^3 + 42x^4$.

2. Soit u un réel. Nous allons essayer de factoriser la somme $25u^2 + 60u + 36$. Tu remarques que $25u^2 = (5u)^2$ et que $36 = 6^2$; c'est pourquoi nous allons essayer d'utiliser une des propriétés démontrées au paragraphe 4.4 :

Dans $\mathbb{R}$, $\square^2 + 2 \times \square \times \bigcirc + \bigcirc^2 = (\square + \bigcirc)^2$.

Pour cela, il faut que $25u^2 + 60u + 36$ puisse prendre la forme $\square^2 + 2 \times \square \times \bigcirc + \bigcirc^2$.

On va mettre $5u$ dans la boîte $\square$: $\boxed{5u}^2 + 2 \times \boxed{5u} \times \bigcirc + \bigcirc^2$.

On va mettre 6 dans la boîte $\bigcirc$: $\boxed{5u}^2 + 2 \times \boxed{5u} \times 6 + 6^2$.

Il nous reste à nous assurer que $60u = 2 \times 5u \times 6$. C'est le cas. Donc

$$\boxed{5u}^2 + 2 \times \boxed{5u} \times 6 + 6^2 = \left(\boxed{5u} + 6\right)^2\ ;$$

$$25u^2 + 60u + 36 = (5u + 6)^2.$$

Soit u un réel. Regardons si nous pouvons faire la même chose avec $9u^2 + 20u + 4$.

Peux-tu le mettre sous la forme $\square^2 + 2 \times \square \times \bigcirc + \bigcirc^2$?

Peux-tu le mettre sous la forme $(\square + \bigcirc)^2$?

Soit u un réel. Nous allons essayer de factoriser la somme $49u^2 - 64$. Tu remarques que $49u^2 = (7u)^2$ et que $64 = 8^2$. L'écriture $49u^2 - 64$ est de la forme $\square^2 - \bigcirc^2$. Nous allons donc utiliser la propriété suivante : dans $\mathbb{R}$, $(\square - \bigcirc)(\square + \bigcirc) = \square^2 - \bigcirc^2$.

$$\boxed{7u}^2 - 8^2 = \left(\boxed{7u} - 8\right)\left(\boxed{7u} + 8\right)\ ;$$

$$49u^2 - 64 = (7u - 8)(7u + 8).$$

Exercice.

Soit x un réel.

Factorise $x^2 + 2x + 1$; $9x^2 + 30x + 25$; $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$; $x^2 - 6x + 9$; $4x^2 + 25 + 20x$; $2\,500x^2 - 1\,100x + 121$; $\frac{x^2}{4} - x + 1$; $\frac{9}{16}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{36}$; $x^2 - 9$; $25x^2 - 16$; $36 - 81x^2$; $4x^2 - \frac{1}{49}$.

$\boxed{\text{R2}}$ Ordre dans $\mathbb{R}$

I – COMPARAISON DE NOMBRES REELS.

Sur le dessin numéro 2 de la feuille de manipulation 5 nous avons tracé une droite graduée d de repère (O, I).

Place les points d'abscisses $\frac{1}{7}$; $\sqrt{2}$; $-\frac{1}{3}$; $-0{,}6$; $\frac{2}{3}$; $\frac{12}{7}$; $-\frac{5}{7}$; $0{,}5$; $-\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; $\frac{7}{3}$; $-\frac{8}{7}$; $\sqrt{2} - 3$.

Utilise ton dessin pour ranger ces nombres.

Parmi les nombres précédents, quels sont ceux qui sont négatifs ? Positifs ?

Comme en quatrième, nous conviendrons que le nombre 0 n'est ni positif, ni négatif.

L'ensemble des réels positifs ou nuls est noté $\mathbb{R}_+$, l'ensemble des réels négatifs ou nuls est noté $\mathbb{R}_-$. Evidemment $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$.

ver símbolos

Placeholders: Formula vs Form

Mathematics teachers are aware of the difficulties their students have in applying formulas. For example, is the student who knows that

(1) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

able to factor $a^2 - b^2$? $p^2 - 4q^2$? $(2a + b)^2 - (a - b)^2$? $x^2 - y^4$? Certainly (1) is a concise way of stating a result, but it should be recognized as a formula that can be applied to many situations. The important thing to remember is the basic form, the difference of two squares; x and y are only placeholders in the formula.

To help students recognize and apply basic forms, I have found it useful to use geometric shapes instead of letters to represent placeholders. Equation (1), for example, could be expressed as

(2) $\square^2 - \Delta^2 = (\square + \Delta)(\square - \Delta)$.

The empty square and triangle in (2) are the placeholders that can be filled with any expression.

Geometric shapes as placeholders are used quite extensively today in elementary school textbooks, particularly with addition, subtraction, multiplication, and division sentences. Most secondary school textbooks make limited use of the concept. The idea of using geometric shapes has been used by most of the mathematics projects that ushered in the new mathematics.

I am certainly not suggesting that the use of letters should be discarded. It is much easier to derive formulas using letters instead of geometric shapes. Once they have been developed, however, they seem to be easily recalled and applied by students who can visualize the formulas with shapes as placeholders. Table 1 is a partial list of some basic forms using letters and geometric shapes as placeholders. Although restrictions on the domains of the placeholders are not mentioned in the table, it is crucial to consider them in a class discussion.

TABLE 1
Some Basic Forms

Letters Used as Placeholders	Geometric Shapes Used as Placeholders
$x^m x^n = x^{m+n}$	$\square^m \square^n = \square^{m+n}$
$(xy)^m = x^m y^m$	$(\square\bigcirc)^m = \square^m \bigcirc^m$
$a(b + c) = ab + ac$	$\square(\Delta + \bigcirc) = \square\Delta + \square\bigcirc$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(\square + \bigcirc)^2 = \square^2 + 2\square\bigcirc + \bigcirc^2$
$\lvert x \rvert \le a$ iff $-a \le x \le a$	$\lvert \Delta \rvert \le a$ iff $-a \le \Delta \le a$
$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$	$\frac{\bigcirc}{\square} + \frac{\Delta}{\square} = \frac{\bigcirc + \Delta}{\square}$
$a^{\log_a x} = x$	$a^{\log_a \square} = \square$
$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$	$\log_a(\square\bigcirc) = \log_a \square + \log_a \bigcirc$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\sin 2\square = 2 \sin\square \cos\square$
$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$	$\frac{d}{dx}(\square + \bigcirc) = \frac{d}{dx}\square + \frac{d}{dx}\bigcirc$

Lawrence P. Bush
Ohio University/Belmont Campus
St. Clairsville, OH 43950

Documento 3

Multiplicación a la italiana, multiplicación per gelosia

Tomado de:

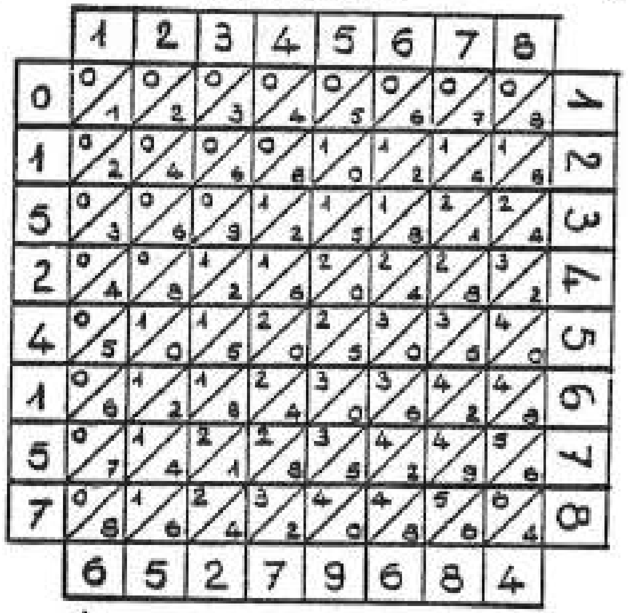
Francés Pellos, *Compendion de l'abaco*, Turin, 1492, édition de la *Revue des Langues romanes*, 1967, p. 17.

(f. 3 V^{to})

La *forma* e maniera de totas causas grans aut petitas en general multiplicar.

```
                 1 2 3 4 5 6 7
                 1 2 3 4 5 6 7
                 -------------
                 8 6 4 1 9 6 9
               7 4 0 7 4 0 2
             6 1 7 2 8 3 5
           4 9 3 8 2 6 8
         3 7 0 3 7 0 1
       2 4 6 9 1 3 4
     1 2 3 4 5 6 7
Summa ---------------------------
     1 5 2 4 1 5 5 6 7 7 4 8 9
```

Aquesta sotrana multiplicacion es per gens che non sabon fa [illegible] tauir los desenals. via



Summa: 152415765279684.

Documento 4

Autorregulación del sistema didáctico

Tomado de:

1) Aleph 1, classe de seconde A, Hachette, Paris, 1978, p. 42.

2) Aleph 0, classe de seconde ACT, Hachette, Paris, 1969, p. 123-124.

3) Collection P. Vissio, classe de seconde CDT, Delagrave, Paris, 1973, p. 377.

3) Collection A. Fouché, classe de seconde A, Vuibert, Paris, 1979, p. 161.

1) Aleph I, Mathématique, Seconde A, Hachette 1978, p. 42.

Soit I et J deux intervalles. Déterminer les ensembles $I \cup J$ et $I \cap J$ dans les cas suivants :

1.150 $I = [-1, 2]$; $J = [0, 5]$.

1.151 $I = [4, 2]$; $J = [2, 7]$.

1.152 $I = [-3, -1]$; $J =]-2, +\infty[$.

1.153 $I = [-3, -3]$; $J =]-\infty, -7[$.

1.154 $I =]0, 2[$; $J =]-5, 1[$.

1.155 $I =]0, 2[$; $J =]-2, 0[$.

1.156 $I =]-1, 2[$; $J = [2, 4]$.

1.157 $I = [-1, 2[$; $J =]2, 7]$.

1.158 $I =]-1, 2]$; $J = [2, 4]$.

1.159 $I =]-\infty, 3[$; $J =]-\infty, -2[$.

1.160 $I =]-\infty, -2[$; $J =]-\infty, -5[$.

1.161 $I =]-\infty, 2[$; $J =]-2, +\infty[$.

1.162 $I =]-3, +\infty[$; $J =]-\infty, -5]$.

1.163 $I = [-3, +\infty[$; $J =]-\infty, 5]$.

Déterminer l'ensemble S des réels x satisfaisant aux conditions suivantes :

1.164 $x < 3$ et $x < -2$.

1.165 $x < -2$ et $x < -5$.

1.166 $1 < x \leqslant 5$ et $-1 < x < 3$.

1.167 $5 > x \geqslant 2$ et $3 \geqslant x \geqslant -1$.

1.168 $-5 < x < 3$ et $-6 < x < 0$.

1.169 $-1 < x < 4$ et $-5 < x < -2$.

1.170 $0 < x < 5$ et $-2 < x < 0$.

1.171 $x - 3$ et $x > -1$ et $4 < x$.

1.172 $-1 \leqslant x < 3$ et $-4 \leqslant x \leqslant -1$ et $-3 < x \leqslant 5$.

2) Aleph 0, Algèbre I, 2e ACT, Hachette, 1969, pp. 123-124.

Quels sont les nombres x tels que l'on ait à la fois :

5.65 $x < 3$ et $x < -2$?

5.66 $x < -2$ et $x < -5$?

5.67 $1 < x < 5$ et $-1 < x < +3$?

5.68 $-5 < x < +3$ et $-6 < x < 0$?

Montrer qu'il n'existe pas de nombre x vérifiant simultanément :

5.69 $-1 < x < 4$ et $-5 < x < -2$.

5.70 $0 < x < 5$ et $-2 < x < 0$.

5.71 $x < 3$; $x > -1$; $4 < x$.

3) Mathématique, Seconde C D T, Delagrave, Coll. P. Vissio, 1973, p. 377.

13-17 Écrire sous forme d'intervalle ou de segment :

(1) $\{x : x \in \mathbb{R}, -4 \leqslant x \leqslant 16,3\}$ (2) $\{x : x \in \mathbb{R}_+, |x| \leqslant 5\}$

(3) $\{x : x \in \mathbb{R}, |x| \leqslant 2\}$ (4) $\{x : x \in \mathbb{R}_+, |x| > 17,3\}$

(5) $\{x : x \in \mathbb{R}, x > -13\}$ (6) $\{x : x \in \mathbb{R}_-, |x| > 4,01\}$

13-18 Écrire sous forme d'intervalle ou de segment :

(1) $\{x : x \in \mathbb{R}_-, |x| < 3,7\}$ (2) $\{x : x \in \mathbb{R}, |x| < 6,21\}$

(3) $\mathbb{R} - [3 ; +\infty[$ (4) $\mathbb{R}_+ \cap [-5,8 ; 11,75]$

13-19 Si c'est possible, écrire sous forme d'intervalle ou de segment :

(1) $[-5 ; 3,1] \cup [2,05 ; 6,34]$ (2) $]6 ; 9,1[\cap]7,2 ; 15,4[$

(3) $]-\infty ; -3] \cup [-4 ; 13]$ (4) $]-\infty ; -12] \cap [-4 ; +\infty[$

(5) $]-\infty ; +7] \cup [2 ; +\infty[$ (6) $]3 ; 7,5[\cup]6,1 ; +\infty[$

4) Mathématiques, Seconde A, Coll. A. Fouché, Vulbert, 1969, p. 161.

6. Déterminer l'intersection des intervalles fermés $[-3, 5]$, $[-2, 7]$, $[-4, 3]$.

7. Déterminer l'union des intervalles du n° 6.

8. Déterminer l'intersection des intervalles $]-3, 5[$, $[-3, 4[$, $]-4, 5[$.

9. Déterminer l'union des intervalles du n° 8.

10. Déterminer l'intersection et l'union des intervalles $[1, 3]$ et $[2, 5]$.

11. Même question pour les intervalles

$[1, 2]$ et $[2, 3]$.

12. Même question pour les intervalles

$]1, 2]$ et $[2, 3[$.

Documento 5

Fin de CE2...

1) **Vérification de $(n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n$**

$n+1$ $\qquad$ $5^2 = 5\times5 = 25$
$3^2 = 3\times3 = 9$

$n=10 \qquad n+1 = 10+1 = 11$

$n = 1, 2, 3, 4$

$(n+1)^2 - (n-1)^2 = \qquad 4n$

$n=1 \quad (n+1)^2 = 2\times2 = 4.$
$(n-1)^2 = 0\times0 = 0$

$(n+1)^2 - (n-1)^2 = 4-0 = 4 \qquad 4\times n = 4\times1 = 4$

$n=2 \quad (n+1)^2 = 3\times3 = 9$
$(n-1)^2 = 1\times1 = 1$
$(n+1)^2 - (n-1)^2 = 9-1 = 8 = 4\times n = 4\times2 = 8$

$n=3 \quad (n+1)^2 = 4\times4 = 16$
$(n-1)^2 = 2\times2 = 4$
$(n+1)^2 - (n-1)^2 = 16-4 = 12 = 4\times n = 4\times3 = 12$

$n=4$
$(n+1)^2 = 5\times5 = 25$
$(n-1)^2 = 3\times3 = 9$
$(n+1)^2 - (n-1)^2 = 25-9 = 16 = 4\times n = 4\times4 = 16$

2) **Vérification de $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$**

$1+2+3+4+5 = 15$

$\boxed{1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$

$n=5 \qquad \frac{5\times6}{2} = \frac{30}{2} = 15$

$n=100 \qquad \frac{100\times101}{2} = \frac{10\,1}{2} =$
$\frac{10100}{2} = 5050$

$n = 6, 7, 8, 9, 10$

$n=6 \qquad \frac{6\times7}{2} = \frac{42}{2} = 21$

$1+2+3+4+5+6 = 21$

$n=7 \qquad \frac{7\times8}{2} = \frac{56}{2} = 28$

$+2$

$n=8 \qquad 8\times9 = \frac{72}{2} = 36$

$n=9 \qquad 9\times10 = \frac{90}{2} = 45$

$n=10 \qquad \frac{10\times11}{2} = \frac{110}{2} = 55$

Documento 6

Una lista de procedimientos

Tomado de:

A. Deledicq, C. Lassave, C. et D. Missenard,
«Faire» des mathématique, 3e,
CEDIC, Paris, 1980. p. 38-40.

Savoir « supprimer » les parenthèses dans une suite d'additions et de soustractions

Voici deux règles pratiques, justifiées par les propriétés des réels et par les conventions de la page 27, qui te permettent de « supprimer » les parenthèses dans une suite d'additions et soustractions qui en contient, et, cela, sans changer le résultat du calcul.

• Si un couple de parenthèses ouvre derrière un signe + ou en début de calcul, on peut le supprimer, sans modifier aucun des signes d'addition et de soustraction contenus à l'intérieur.

• Si un couple de parenthèses ouvre derrière un signe − on peut supprimer ces parenthèses à condition de changer tous les signes d'addition et de soustraction situés à l'intérieur.

$$B = (-x-y) + (2-3x) \quad - \quad (a-b+4)$$
$$B = \underbrace{-x-y \ + \ 2-3x}_{\text{les signes n'ont pas changé}} \quad - \quad \underbrace{a+b-4}_{\text{ils ont changé}}$$

Savoir développer un produit en utilisant une identité remarquable

$$(2b-3c)^2 = (2b)^2 - 2(2b)(3c) + (3c)^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

d'où

$$(2b-3c)^2 = 4b^2 - (4b)(3c) + 9c^2$$
$$(2b-3c)^2 = 4b^2 - 12bc + 9c^2$$

Regarde bien ce que nous avons fait : le «●» et le «●» de l'identité remarquable ont été remplacés par des parenthèses, puis, nous avons rempli ces parenthèses.

Savoir reconnaître le développement d'un produit remarquable

Cherche les termes qui ont l'air d'être des carrés et regarde de quels nombres ils sont les carrés.

$$49x^2y^4 \quad - \quad 25z^2$$
$$a^2 \quad - \quad b^2$$

● = $7xy^2$ ● = $5z$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$49x^2y^4 - 25z^2 = (7xy^2 + 5z)(7xy^2 - 5z)$$

Savoir factoriser les écritures proposées en 3e

On te propose une écriture qui est une somme de produits. Isole et regarde chaque terme de cette somme.

1° Vois-tu un facteur commun ?
Alors mets-le en facteur

Exemples :

$$(2x+3)(x-5) - (2x+3)(2x-1) = (2x+3)(\ldots)$$
$$5a+5b+5c = 5(\ldots)$$
$$3a+4a+5a = a(\ldots)$$

2° Peut-il s'agir du développement d'un produit remarquable ?

Exemples :

$$81x^2 - 64 = (9x-8)(9x+8)$$
$$9y^2 + 4x^2 - 12xy = (3y-2x)^2$$
$$4 + 4y^2 + y^4 = (2+y^2)^2$$
$$x^2 + 2x - a^2 + 1 = (x+1)^2 - a^2$$
$$= (x+a+1)(x-a+1).$$

3° Ou bien tu as mal regardé ou bien il te faut pousser ton analyse.

a) Le facteur commun peut en effet être caché derrière une multiplication supplémentaire ; en particulier :

- Il peut avoir été remplacé par son opposé dans certains termes.
- Il peut être contenu dans un carré.

Exemples :

$$(x+1)(3x+1) - (2x+2)x = (x+1)(\ldots - 2 \ldots)$$
$$(x-1)(2x+3) + (1-x)(3-x) = (x-1)(\ldots - \ldots)$$
$$9x^2 - 3x = (3x)(3x \ldots)$$
$$(x-6)^2 + (6-x) = (6-x)(\ldots)$$
$$2x^2 - 25 + (x+5) = (x+5)(\ldots)$$

b) Un facteur peut être commun à certains termes seulement.
Groupe ces termes. Il s'agit peut-être alors d'un développement du type :

$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd.$

Remarque : le développement précédent se repère souvent au fait que les termes peuvent s'ordonner suivant le nombre de facteurs qu'ils contiennent.

Exemple :

$$1 - a - b + ab = 1 - b - a + ab$$
$$= (1 - b) - a\,(1 - b)$$
$$= (1 - b)\,(1 - a)$$

$$10\,xy - 2 + 5\,x - 4\,y = 10\,xy + 5\,x - 2 - 4\,y$$
$$= 5\,x\,(2\,y + 1) - 2\,(1 + 2\,y)$$
$$= (5\,x - 2)\,(2\,y + 1)$$

Mais le nombre de facteurs n'est bien défini que pour des variables littérales ;

ainsi $a^2 = a \cdot a$

$20 = 2 \cdot 10$ mais aussi $20 = 4 \cdot 5$ ou $2 \cdot 2 \cdot 5$

Il se peut aussi que des simplifications t'empêchent de retrouver le chemin de la factorisation.

Exemple :

$$2\,x^2 - y^2 + xy = ?$$

En fait :

$$(x + y)\,(2\,x - y) = 2\,x^2 + \underbrace{2\,xy - xy}_{\text{cette simplification rend le retour difficile.}} - y^2$$

> 4° Lorsqu'une mise en facteur a été effectuée, il se peut que chaque facteur puisse lui-même se mettre en facteur. Il faut continuer.

Si tu le peux, tu dois arriver à des facteurs « du premier degré » mais ce n'est pas toujours possible.

Exemple :

$$x^2y - 6\,xy + 9\,y = y\,(x^2 - 6\,x + 9)$$

$$x^2 - 6\,x + 9 = (x - 3)^2$$

$$x^2y - 6\,xy + 9\,y = y\,(x - 3)^2$$

$x^2 - 1 = (x - 1)\,(x + 1)$

$x^2 + 1 =$ Rien de mieux !

EXERCICES POUR S'ENTRAINER

1 – *Est-il vrai, dans R, que :*

$|a + b| = |a| + |b|$?

$-(x + 2) = -x + 2$?

$(2a + 4)^2 = 2\,(a + 2)^2$?

$\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 1} = \frac{3x}{1} = 3x$?

$\frac{5x + 2}{x^2 + 2} = \frac{5x}{x^2} = \frac{5}{x}$?

2 – *Est-il vrai que dans R que :*

$u^3 - u^2 = u$?

$u^3 + (-u^2) = u$?

$-18x - 9 = -9\,(2x + 1)$?

$4x^2 - 9 = (4x - 3)\,(4x + 3)$?

$4x \cdot 4x = 4x^2$?

$(2 + y)\,(3 + x) = 6 + xy$?

$49 - 4k^2 = (7 - 2k)\,(7 + 2k)$?

Posfacio
a la segunda edición

Didáctica, antropología, matemáticas

En la presentación de la primera edición de esta obra se deslizó una incoherencia evidente, que merecería, por sí misma, un largo comentario. La tapa decía *Del saber sabio al saber enseñado*. La portada continuaba con *De las matemáticas académicas a las matemáticas enseñadas*, haciéndole una suerte de eco deformado. Un lector atento, de inmensos méritos, pero en este caso más viperino que solícito, no tardó en señalarlo[1].

Indudablemente hubiera correspondido al autor encargarse de este asunto. Sin embargo, sabemos –a la par del siglo, seamos freudianos– que no existe error inocente. En esa astucia editorial que no era por cierto más que una equivocación del autor, se dejaba ver una cierta verdad. La continuación, en efecto, reveló que el lapsus contenía un germen de verdad. El esbozo teórico propuesto, elaborado en relación con las matemáticas, excedía ya desde su impulso original los límites de lo matemático. Numerosos lectores que provenían de otros campos de estudio no se equivocaron y lo vieron como una mecha que proyectaba su débil claridad hacia sus propios territorios.

A la inversa, algunos, sin duda menos numerosos, invocaron la existencia de cierto particularismo culturalmente reconocido de su objeto de estudio para justificar, si no su rechazo al esquema propuesto, al menos la libertad que podían tomarse para redefinir sus contornos. (La cuestión principal, piedra de toque de esa imaginación crítica conquistada a tan bajo costo, fue ciertamente la del "saber sabio", expresión que a más de uno se le quedó atragantada.)

Esa "teoría", repitieron a gusto aquellos a quienes la envidia volvía locuaces, puede parecer pertinente para las matemáticas que se enseñan en la escuela secundaria; es menos pertinente o no lo es en absoluto para las matemáticas que se enseñan en la Universidad, en las que el autor habría encontrado el prototipo de ese "saber sabio" para él insuperable. En definitiva, para algunos sólo se trataba de una descripción, bastante azarosa y demasiado recargada para ser honesta, de un episodio singular de la historia reciente de las instituciones de enseñanza, que fueron testigos del florecimiento de la "reforma de las matemáticas modernas", antes de que se muriera a causa de sus propios excesos.

En otras partes se llamó la atención sobre el hecho de que se trataba de una manera muy francesa de pintar una realidad también muy francesa. Realidad sin duda innegable pero eminentemente lamentable. Se invocó la organización napoleónica del país, el carácter intacto del centralismo, la heteronomía descaradamente revelada; en fin, la situación de todo un pueblo secularmente consagrado al culto impávido del *top-down**. Tal estado de cosas sirvió a esas opiniones para afirmar estentóreamente su preferencia por el *bottom-up**, la autonomía, la libertad de pensar y de vivir.[2]

Sería vano pretender reducir a un único principio esas miles de variaciones. Sin embargo, sordamente, a través de entusiasmos y rechazos, de palinodias en todos los sentidos,

* N. del T. En inglés en el original. Estas expresiones podrían traducirse como "de arriba a abajo" y "de abajo a arriba" respectivamente.

tanto en el hipercriticismo vacío como en el préstamo interesado, se volvía *insistente* a un mismo tema. Era, en el fondo, el tema del "género próximo" y de la "diferencia específica".

Nadie parece haber formulado verdaderamente el problema epistemológico que planteó, junto con algunos otros, el concepto de transposición didáctica. ¿Se tratará simplemente de un concepto *migrador* –quizás un poco más que los otros–, hábil para recorrer en un nomadismo más o menos controlado, el traje de Arlequino del campo *de las* didácticas, cualificando obstinadamente una forma invariante acoplada a sustancias cambiantes? ¿O acaso habrá encontrado, más allá del desmembramiento ferozmente afirmado de un campo plural, su lugar natural, su espacio vital, desde el cual puede desplazarse fácilmente para adoptar una forma concreta aquí y allá?

Esta última hipótesis se ha enredado en una inadecuada polémica, que precisamente la teoría de la transposición didáctica hubiera permitido esclarecer: la polémica entre las didácticas "particulares" (disciplinarias) y una presunta "didáctica general". Aferrada a sus posiciones, para salvar su alma, quiero decir su *especificidad* –¡la palabra ha sido finalmente soltada!– cada didáctica particular (la de las matemáticas, la del francés, la de la física, etc.) se ha negado a renunciar a las fronteras rígidamente trazadas, garantes de su existencia y legitimidad epistemológicas. Que haya intercambios y buenos procedimientos, como se acostumbra entre vecinos, ¡pues sí, naturalmente! Pero el individualismo epistemológico, sello de la integridad científica y prenda de la supervivencia social, parece desear que no haya nada más en común. De ese modo, cada cual conservaría la libertad para retomar por su propia cuenta y para rechazar o acomodar a voluntad aquello que otros sólo habrían producido para su propio consumo.

Creo que una de las razones tenaces de esa obstinación en defender el espacio propio al tiempo que se ignora al resto del mundo –que la fuerza de las cosas nos obliga sin embargo a frecuentar–, fue el miedo de verse un día expulsados de esos verdes paraísos –de las matemáticas, de la física– en los que cada cual había crecido y madurado. Esforzándonos muy especialmente por no mirar hacia afuera, conservando la orientación de nuestra mirada hacia el *alma mater*, alfa y omega de toda la empresa, esperábamos ser vistos y amados finalmente por ella. El período en que vivimos debería acabar de denunciar la extrema ingenuidad de una apuesta semejante. No puede ser el hijo pródigo quien se limita a jugar entre las faldas de su madre.

Esa maniobra poco seria se fundaba además en un rigor epistemológico aparentemente incuestionable. Se afirmaba que la didáctica se interesa por lo que es *específico* de los contenidos (o del conocimiento). Esta propuesta puede ser atribuida con justicia a Guy Brousseau, a quien debemos casi todo porque le debemos lo *esencial*. (La confesión podrá parecer excesiva a los espíritus fríos que se ufanan de saber distinguir la paja del trigo; sin embargo la mantendré.) Esta propuesta, subrayémoslo, no tiene la culpa; es apropiada y básicamente está lejos de haberse vuelto banal. Lo que ocurre es que se hizo de ella un uso inapropiado.

Ella indica lo que constituye, en esencia, la problemática de la didáctica, con lo cual quiero decir de *toda* didáctica. En un comienzo se hizo de ella un uso estratégico. En tanto se refería a los contenidos de saber y, en el caso que nos ocupa, a las matemáticas, trazaba una línea de demarcación indispensable para abarcar y rechazar la antigua pedagogía. Al mismo tiempo, desalojaba de la futura construcción a algunos *squatters** arrogantes –psicólogos y demás–, quienes al cabo del tiempo, viendo ese territorio despoblado, habrían creído descubrir en él un espacio apropiable, virgen de esfuerzos

* N. del T. Expresión inglesa, corrientemente usada en francés, que designa a los ocupantes ilegales de inmuebles deshabitados.

e ideal para establecer allí una suerte de cómoda segunda residencia... Excepto algunas valiosas excepciones, estos intrusos se encontrarían deslegitimados de entrada. De ese modo, la propuesta abría un espacio que podía conquistarse.

Pero también fue muy mal comprendida. Estudiar lo que es específico del conocimiento, ¿sería usar solamente herramientas "específicas" de *ese* conocimiento? La teoría –como nos lo enseñó Bachelard– no es el pleonasmo de la experiencia. Ejemplarmente, Guy Brousseau creó el concepto de contrato didáctico: herramienta para alcanzar "lo específico", comprenderlo y dar cuenta de él. Pero se trata de una herramienta de muy largo alcance, un primer modo de reconocer "lo específico en general" que, epistemológicamente, nos mostraba el camino. Ciertamente, se procura estudiar aquello que en el comportamiento del maestro y del alumno es específico del conocimiento. Pero ¿ese *estudio* mismo, debe recurrir solamente a herramientas también específicas del conocimiento que deben permitir que se lo estudie en la especificidad de sus efectos? Claro que no. Y desde hace veinte años, a decir verdad, todas las creaciones conceptuales que podemos atribuir a los didactas de las matemáticas impugnaron silenciosamente esta epistemología proteccionista.

De una especificación problemática, inaugural y dinámica, hemos pasado entonces rápidamente a una visión rentista, de prudente administración de un bien que consideramos propio sin que nadie nos lo haya otorgado; sobre todo, sin haber realizado, conscientemente, ningún gesto *específico* para apropiárnoslo de una manera *específica*. Se puede decir que lo consideramos nuestro por definición y que frente a los otros a quienes se intenta desalojar, alegamos el derecho del primer ocupante. No nos sorprendamos, entonces, de que algunos, no siempre bien intencionados, hayan querido proclamar que el Rey estaba desnudo.

En verdad, lo han hecho muy torpemente. Puesto que de esa tensión surgió, desde el comienzo, una idea que siempre hemos rechazado, sin que nos tomáramos el trabajo de torcerle el cuello: la idea de una "didáctica general".

Con toda evidencia, su genealogía se esboza a partir de ella misma. Es una práctica tradicional de ciertas instituciones de formación (pienso en nuestras escuelas normales de profesores, aunque en muchos otros países se observa el mismo hecho) que consiste en distinguir entre pedagogía *general* y pedagogías *específicas*. Oposición que se conserva con el actual paso a la *psico*pedagogía* y luego, en los últimos años, con la sustitución de "didáctica" en lugar de "pedagogía". El patrón lingüístico estaba por ende preparado, y se encontraba acreditado por una cierta cultura escolar. Podemos creer que fue allí donde se lo buscó para forjar la expresión didáctica general. Pero también podía pretender otros usos, muy expandidos y más ambiciosos.

En efecto, ¿no hablamos acaso, en la historia de nuestras instituciones de enseñanza, de "física general", de "química general", de "matemáticas generales" y actualmente hasta de "álgebra general"? Pero en verdad las formaciones epistemológicas a las que esas expresiones remiten no son más que un ardid del proceso de transposición didáctica, respecto del cual aparecen, episódicamente, como uno de sus productos particulares.

Esas formaciones de saber con propósito didáctico son artefactos epistemológicos que recuerdan los condicionamientos de la enseñanza. Se los considera abarcadores y generales en extremo. En realidad no son sino la antecámara, la propedéutica de los saberes, vías de acceso que ha trazado

* N. del T. En Francia y en otro países europeos, la psicopedagogía se entiende como la relación entre la actividad psicológica y pedagógica, sin que tenga necesariamente un carácter clínico, sino uno bien cercano a la psicología educativa.

la Escuela para conducirnos a ellos de manera más o menos arbitraria. De ese modo, pueden existir *manuales* de matemáticas generales, *profesores* de física general, *enseñanzas* de química general, y hoy ¿por qué no? "asignaturas" de didáctica general.

Pero esas formaciones epistemológicas, que son el resultado de un recorte del saber que se va a enseñar, organizadas por el proceso de transposición didáctica y que deben hacer reconocer y legitimar su vínculo con un saber verdaderamente abarcador ("las matemáticas", "la física", "la química", etc.), no pueden erigirse con propiedad en "parte" alguna de esos saberes, parte fundada intrínsecamente, definida independientemente de los condicionamientos de la institución didáctica y que llevaría el nombre de "matemáticas generales", "física general", "química general".

En ese caso serían saberes *sin objeto*. Saberes, además, sin productores inmediatos. Esas "generalidades", corpus hechos de piezas añadidas, fruto de un vasto trabajo transpositivo al que deben quizás ese bruñido de los objetos largamente trabajados, son denunciadas por la composición heteróclita de su contenido y su sola unidad se deriva de la intención didáctica de la que proceden.

Mala respuesta, pues, y que debería sorprender por parte de los "didactas". Sin embargo, si exige ser trabajada, la cuestión es buena. Pero es preciso llevarla hasta sus límites. Existe, efectivamente, otra interrogación de la que sólo nuestro encierro cultural ha podido protegernos hasta ahora. Didactas de las matemáticas, ¿con qué se vinculan ustedes? ¿Dentro de qué conjunto más vasto sitúan su disciplina? Esta es la interpelación que nos habría hecho toda mente sensata que hubiera dirigido su atención a nuestra rudimentaria existencia.

Pero hete aquí que estábamos y seguiríamos aferrados a las faldas de nuestras madres. Los didactas, unidos tácitamente por una complicidad inconfesable, no querían vincularse con nada, por temor a perderlo todo. La didáctica de las matemáticas, particularmente, se ofrecía como un punto singular, una isla separada de cualquier continente a la que sólo el cordón umbilical de la matemática vinculaba con un universo conocido. Sin progenitores y sin raíces, desprovista de filiación identificable, al mismo tiempo género, especie y único espécimen conocido, "la didáctica" se presentaba así como una utopía dinámica pero en estado de ingravidez en el universo de los saberes: una atopía.

Convengamos que esta insularidad salvaje fue necesaria y hagamos justicia a las exigencias de una policía epistemológica que debe ser inflexible, quizás más hoy que ayer. La autarquía científica, sin embargo, no se practica indefinidamente. Me parece que la "diferencia específica" que se trataba de conquistar se ha obtenido, incluso si tenemos que redefinirla y construirla permanentemente. ¿Pero a quién dársela a reconocer, si no nos abrimos al "género próximo"? ¿Si ese género próximo no se modifica? El aislamiento no constituye una política. Al cabo de ese camino, nos garantiza empobrecimiento. Muchos de los episodios que nuestra comunidad ha conocido confirman la imposibilidad de vivir en un mundo cerrado. La teoría de la transposición didáctica no es el menor ejemplo de ello: producida en el seno de la didáctica de las matemáticas, se escapa de ésta apenas nace, se prolonga en ecos hacia otras comunidades que la acogen o la rechazan. (Pienso aquí en una cierta historia de las matemáticas que se realiza no lejos de nosotros y afronta, sin defensas, situaciones que no podría controlar sin incurrir en contrasentidos.)

¡Pero no hay ningún espacio común para albergar los debates necesarios! A falta de campo de batalla, ya que no de combatientes, el combate –quiero decir el *debate*– no tuvo lugar. Porque no hay *lugar*. O bien se trata entonces de un combate sospechoso y desviado desde el principio. Sería fastidioso mostrar que nuestras necesidades epistemológicas elementales no encuentran solución.

¿Dónde situar, pues, la didáctica de las matemáticas? En pocas palabras, mi respuesta es la siguiente: "la didáctica", las didácticas, se inscriben en el campo de la *antropología*.

¡No se lancen sobre el diccionario! Es preciso recordar que la palabra, y también la cosa, no están precisamente en olor de santidad; piensen en Foucault. Si hace falta una definición, retengamos la que nos ofrece una etimología básica: la antropología es el estudio del Hombre. Definición anticuada, se pensará, incluso en el vocabulario en que se la formula: ¡el Hombre! Pero he aquí que la didáctica de las matemáticas no sale de la nada: es el efecto de un retraso histórico; el vástago tardío y aislado desde el inicio, de la empresa antropológica. De ese retraso y de esa filiación da testimonio la ideología que anima a sus actores: en el fondo, es la de la Ilustración y de nuestra Revolución, la misma que inspiró la pluma de Condorcet.

En pocas palabras, la didáctica pertenece al continente antropológico, que gracias a ésta se impone sobre el mar de la ignorancia. No es una isla sino un istmo que tal vez mañana será considerado como nuevo territorio altamente conquistado. En ese sentido, obviamente, la didáctica modifica el poderío de la antropología y la idea misma que nos hacemos de ella. Podría ser que mañana se convirtiera en el principio de una revolución.

Admitamos pues –puede que ustedes digan quizás–, que las didácticas (de las matemáticas, del francés, etc.) se sitúan dentro de la antropología. ¿Encuentran allí algún objeto común al cual dedicarse? En otros términos, ¿cuál es el *objeto* de las didácticas? Para el que busque la respuesta a esta pregunta, la cultura no le servirá de ayuda: sobre este punto permanece muda. Porque la respuesta debía ser inventada. Veamos esto.

No tendrán ustedes ningún problema para formular el objeto de la antropología *religiosa*, o el de la antropología *política*: para la primera, lo *religioso* (que excede "las religiones", pero de todos modos esto es aquí secundario); para la segunda, lo *político* (que paralelamente va más allá de los "sistemas políticos"). Y bien, tratándose de las didácticas, semejante objeto no existía en la cultura. Lo han creado precisamente las didácticas, laboriosamente, contra todas las negaciones culturales, y ésa es ya una manera de conmocionar la cultura [3].

Entonces, podemos dar ahora su nombre a ese objeto, lo cual es una manera de empezar la construcción: he nombrado *lo didáctico*. Lo didáctico, veremos, es una dimensión de la realidad antropológica que la atraviesa de parte a parte. Y que requiere la elaboración de una antropología *didáctica*, subcontinente del mapa en el que las didácticas, tal como las conocemos, representan las primeras bases e instalan una red problemática de inteligibilidad.

Este es el decorado propuesto. Habría que retomar ahora más sutilmente esta génesis programática. Naturalmente, sólo la trazaré aquí a grandes rasgos, y simplificándola notablemente: la construcción de su objeto ocupa enteramente a una ciencia y la supone enteramente. Volvamos al punto de partida, la antropología. Presentemos sus personajes esenciales desde el punto de vista que nos ocupa (los tomaremos aquí como términos primitivos). Serán pues las *instituciones*, los *sujetos*, los *objetos*, la *relación* (personal) de un sujeto con un objeto, la *relación* (institucional) de una institución con un objeto[4]. El objeto O *existe* para el sujeto X si X tiene una relación con el objeto O: designaré ese objeto, la relación de X con O, como R (X,O). Igualmente, el objeto O existe para la institución I —es un objeto *institucional para I*— si existe una relación

institucional de I con O, R_I (O). Notemos al respecto que un objeto existe —es un objeto— si es un objeto al menos para un sujeto X o una institución I. Dado ésto, diremos que X *conoce* O si X tiene una relación con O (lo que significa decir pues que O existe para X). Diremos que para el sujeto Z de una institución I, X conoce O si Z supone un juicio de *conformidad* de R (X,O) con R_I(O).

Esta avalancha de nociones no debe disimular lo esencial: "el conocimiento", entendido como existencia de relaciones (personales o institucionales) con los objetos *existe en todo momento en lo real antropológico*. Incluso allí donde no lo buscamos, un sólo objeto, un objeto *cualquiera* nos lo revela, haciendo surgir *conocimientos* como la pisada de quien se pasea en el campo en verano hace surgir de la tierra a los saltamontes. De ese modo, en el corazón de la antropología, vemos emerger una antropología del *conocimiento*, una antropología *cognitiva*.

Todavía no nos encontramos, sin embargo, con nada que sea del orden de lo didáctico. Hay objetos, hay sujetos e instituciones y relaciones entre éstos y los objetos. Hay también génesis y cambios y evoluciones. Un objeto llega a existir para un sujeto: éste "tiene conocimiento" de dicho objeto; se establece una relación, se fortifica, se reforma, se altera. Existe de ese modo toda una vida del conocimiento y de los objetos —que son necesariamente, ontológicamente, *objetos de conocimiento*. La fórmula poética, divulgada como una hermosa afirmación, debe ser tomada en sentido estricto: el conocimiento es el co-nacimiento*; el objeto nace para el sujeto, el sujeto nace con el objeto.

Se trata de momentos ricos; pero lo didáctico no está todavía en ellos porque es consustancial a la existencia de

* N. del T. El autor realiza un juego de palabras: en el original la palabra *connaissance* (conocimiento) es dividida en componentes semánticos más discretos para dar lugar a *co-naissance* (co-nacimiento), que el autor propone como explicación del sentido de *connaître* (conocer).

una *intención*: una intención didáctica, precisamente. Existe *lo* didáctico cuando un sujeto Y tiene la intención de hacer que nazca o que cambie, de cierta manera, la relación de un sujeto X con un objeto O. (Naturalmente, puede ocurrir que Y = X). Pero consideremos sobre todo que lo didáctico, medido con esta vara, sobrepasa el territorio familiar de nuestras actuales didácticas, que sin embargo lo reencuentran inevitablemente a cada instante. Puesto que lo didáctico habita en todas partes en la materia antropológica, está *enteramente presente* —metáfora que toma prestada a los matemáticos— en lo cognitivo y también en lo antropológico. Es preciso aprender a verlo, puesto que la cultura no nos ayuda para nada en ese sentido: la "sensibilidad didáctica" es aquí la esencia de un oficio nuevo, el de *antropólogo de lo didáctico*.

En el seno de nuestra antropología del conocimiento se diseña de ese modo una antropología *didáctica* del conocimiento. Conservemos la denominación: olvidemos el sustantivo, sustantivicemos el adjetivo y sin olvidar jamás la "sensibilidad antropológica", hablemos sin rodeos de *didáctica del conocimiento o didáctica cognitiva*.

Hemos avanzado. Sin duda nos encontramos todavía a cierta distancia de nuestras didácticas; pero ya olfateamos el territorio aportando un hálito expansivo que abre los horizontes.

En el curso de estos años, algunos de nosotros —¿debo mencionar nuevamente a Guy Brousseau?— hallamos demasiado estrecho el ropaje que nos ofrecía la didáctica y provocamos escándalo por haber propuesto relaciones inesperadas: en nombre de una imaginación sin límites, comparamos, por ejemplo, al alumno frente a un problema de matemáticas, ¡bella y excelente promesa a nuestro esfuerzo!, con un pescador, un jugador de fútbol, un joven enamorado, una mujer acicalándose y muchas cosas más. ¡Metáforas! ¡Además, sin

pertinencia!, se nos gritaba. Se nos instaba a hablar correctamente, sin esos imposibles desvíos que desacreditan nuestra disciplina; se nos pedía: ¡hablen didáctica!, como antiguamente se ordenaba hablar en buen cristiano.

Ahora bien, por ese medio, lo que hacíamos nosotros era recorrer libremente, según nuestras necesidades, un espacio más vasto, un espacio abierto, transitando al mismo nivel nuestro universo encerrado en sí mismo, presto a abrirse por poco que se empujara la puerta. Porque la realidad antropológica en la que nos sumergimos de esa manera, con su riqueza familiar y su ordinaria mescolanza no destruye la unidad de nuestro objeto que, por el contrario, tiene allí sus fuentes. Las nuestras no eran "metáforas", eran simplemente *comparaciones*, plenamente legítimas en el espacio antropológico.

En resumen, vemos ahora que la objeción se invierte. ¿En qué se parecen el alumno frente al problema y el enamorado abandonado?, podría argüirse. Pero la diferencia que podemos ver ahora es cultural. El despecho amoroso, la actividad matemática: estamos frente a dos géneros que la cultura no se atrevería a mezclar. Nos entrega un mundo ordenado y clasificado. Y ella nos lo entrega. Pero una ciencia no se hace con lo que la cultura profusamente le ofrece. ¡Prueben más bien que dichos géneros no se parecen! La física no se edificó sobre la distinción, evidente para nosotros como sujetos de la cultura, entre los cuerpos blandos y los cuerpo duros. En el mejor de los casos, la reconstruye.

De modo que reencontramos, por lo tanto, la cuestión de la especificidad. La especificidad (de la didáctica de las matemáticas, por ejemplo) se construye. No es un dato. O bien es un paquete que la cultura ha atrapado, del que debemos aprender a cuidarnos y que tendremos que desactivar. Blasón irrisorio, en efecto: no nos justificamos por una distinción que sólo fundamenta la cultura. Esas pobres estratagemas terminan por no engañar a nadie y nos hacen dudar de nosotros mismos. Es preciso, por tanto continuar avanzando.

Se introduce, entonces, la noción de *saber*. Podemos considerarla en principio como una noción primera, que designa una cierta forma de organización de los conocimientos: las matemáticas son un saber, y también la física, etc. Pero no todo conocimiento –en el sentido en que se esbozó más arriba– pertenece al orden del saber. La observación del lenguaje corriente (que forma parte de los objetos de la antropología y puede proveer al antropólogo de lo didáctico un material tan digno de atención como cualquier otro) nos ayudará a formular esta distinción.

De cualquier persona que realiza delante de nosotros una manipulación que juzgamos delicada, diremos gustosamente que *de eso sabe*. Pero, si le preguntamos cómo se hace, nos dirá tal vez que *en ello no hay nada que saber*. Otro observador podrá considerar, al contrario, que para lograr el mismo resultado, es preciso *saber muchas cosas*, afirmando así que ese simple "gesto" que se recorta de una práctica y nos sorprende es un objeto de saber o, al menos, que pone ese tipo de objetos en juego. Yo diría que en un caso habría *presunción de no-saber* y, en el otro, *presunción de saber*.

Un cierto conocimiento, es decir, una cierta calidad de relación con un objeto se hace ver, mientras que un saber siempre es *supuesto*. Se presenta ante nosotros mediante sus emblemas (su denominación, etc.) y lo reencontramos presente *in absentia*, como una *potencialidad* o una carencia, cuando queremos "aprenderlo".

En ese sentido, los saberes son hipóstasis improbables. La cuestión de su existencia no está jamás enteramente asegurada, es siempre discutible y también un espacio de conflictos. La didáctica de las matemáticas ¿es un saber? ¿y cómo se podría asegurar que lo es? No nos sorprendamos entonces de

que el lenguaje corriente se haga eco, un eco indefinidamente reiterado y distorsionado de esas tensiones. Los saberes introducen así una dinámica en la sociedad y la cultura. No insistiré mucho en el hecho de que son además objetos de *deseo*.

Creo que eso sólo bastaría ya para reconocer en los saberes, tal como ellos emergen en el ámbito real antropológico, *un cierto tipo de objetos* que sirven para designar, correlativamente, en el campo de la antropología, el espacio de una antropología *de los saberes*. Es allí donde, como se verá, deberemos situar rigurosamente la teoría de la transposición didáctica (de los saberes).

Pero preguntémonos si semejante antropología "existe" actualmente. Y para hacerlo, juguemos un poco con las palabras. Coloquemos el adjetivo *cognitivo* del lado del conocimiento; el adjetivo *epistemológico* del lado de los saberes. En lugar de antropología *de los saberes*, hablemos pues de antropología *epistemológica*. La sinonimia es concebible, puede aceptarse. Abreviemos nuevamente, según un procedimiento ya empleado, y digamos, entonces: antropología *epistemológica* o... *epistemología* a secas. ¡La antropología de los saberes no sería otra cosa que la epistemología, esta vieja conocida!

Confesemos sin ambages que no se trata de un malabarismo sino de un desafío. Porque hacer de *epistemología* el sinónimo de *antropología de los saberes* significa polemizar plenamente contra la epistemología actual; significa "antropologizar" la epistemología, tal como hemos "antropologizado" más arriba las didácticas.

En efecto, la epistemología actual nos proporciona una visión muy restringida de la *vida de los saberes* en la sociedad. Lo que caracteriza a los saberes es especialmente su "multilocación". Un saber dado S se encuentra en diversos tipos de instituciones I, que son para aquel, en términos de ecología de los saberes, respectivos *hábitats* diferentes. Pero, si consideramos esos hábitats, percibimos inmediatamente que el saber en cuestión ocupa regularmente *nichos* muy diferentes. O, para decirlo de otro modo, que la relación institucional de I con S, $R_I(S)$, a la que denominaré también *la problemática de I en relación con S*, puede ser harto diferente. Correlativamente, la manera en que los agentes de la institución van a "manipular" ese saber también será variable.

En ese sentido, podemos distinguir *cuatro* grandes tipos de manipulación de S y por ende, cuatro grandes tipos de problemáticas relativas a S; pero en principio sólo consideraré *tres*, aquellas con las que la cultura nos ha familiarizado.

La institución I puede tener, en relación con S, una problemática de *utilización*. Es así como el ingeniero, por ejemplo, y por supuesto, todo aquel "utilizador" en el sentido habitual del término, manipula las matemáticas. (En una misma categoría, reúno aquí, subrayémoslo, *todas* las manipulaciones de S que no entran en las otras tres categorías anunciadas.) La institución I puede tener también, en relación con S, una problemática de *enseñanza* (incluso se hablará, en tanto no haya ambigüedad, de problemática *didáctica*). En ese caso, los agentes de I manipulan a S al enseñarlo; o, más exactamente, *para enseñarlo*. Finalmente, la institución I puede tener, en relación con S, una problemática de producción. Sus agentes manipulan a S *para producir el saber S*.

Por lo tanto, un saber puede ser utilizado, enseñado, producido. En todas esas modalidades, los saberes se distinguen de "los sistemas institucionales de conocimientos", que podríamos llamar –la expresión, según creo, pertenece a Pierre Bourdieu– *saberes prácticos*, que *se ponen en funcionamiento, se aprenden, se enriquecen, sin ser sin embargo utilizados, enseñados, producidos*.

Resulta ahora bastante claro que la epistemología, tal como existe, se haya consagrado hasta ahora con pasión al estudio casi excluyente de la *producción* de saberes y al estudio de sus productores; que haya olvidado tanto su *utilización* como su *enseñanza*. Sin embargo, éstas no pueden ser expulsadas de un estudio antropológico de los saberes. Sin duda, cada esfera posee su autonomía; pero esta autonomía es siempre *relativa*. Para comprenderlo mejor, avancemos todavía un poco más en nuestro trabajo lexicográfico.

En el cruce entre la antropología de los saberes y la antropología didáctica del conocimiento, se ubica la antropología *didáctica* de los saberes, cuyo objeto es la manipulación de los saberes con intención *didáctica* y, en particular, la *enseñanza* de los saberes. Abreviemos también aquí. Así como hemos hablado de didáctica del conocimiento (o didáctica cognitiva), hablemos para resumir de *didáctica de los saberes*. Ésta es a la vez una división de la antropología de los saberes o epistemología (en el sentido que le hemos dado) y de la didáctica cognitiva. Denominaré en lo sucesivo a ésta –nueva abreviatura– *didáctica*, sin más.

Hecha esta observación, una de las más sólidas lecciones provistas por la didáctica (veremos cómo se despliega luego sobre *las* didácticas) es que la enseñanza de un saber, más ampliamente, su manipulación didáctica en general, no puede comprenderse en muchos de sus aspectos si se ignoran sus utilizaciones y su producción. (Veremos cómo se especifica este principio en el caso del estudio de los fenómenos de transposición didáctica).

Esa lección entiende que los modos de presencia social de un saber nunca permiten que se los disocie completamente, cualquiera sea el punto de vista desde el que se los aborda: no hay, en ese aspecto, "referencia privilegiada" ni mundo cerrado. Desde el punto de vista de la antropología, un saber se presenta como una totalidad, cuyos diferentes momentos son igualmente vitales.

El olvido sobre el que se ha construido la epistemología actual debería también explicarse: puesto que no es más que un hecho cuya explicación corresponde a la antropología de los saberes. Esto significa proponer un problema de epistemología –de epistemología (en el sentido que le hemos dado) de la epistemología (actual)– del cual sólo expresaremos aquí unas pocas palabras.

Debemos ver en él, creo, el efecto de un cierto modo que tiene la cultura de tratar a los saberes. Se valoriza y prioriza su *producción*. Su *utilización* permanece opaca, ignorada. Su *enseñanza*, más visible culturalmente que la utilización, es sin embargo subestimada, considerada como una empresa contingente y un mal necesario. En ese sentido, la epistemología en la que pensamos registra pasivamente un juicio de la cultura y, lo que es peor, al ejercerlo, refuerza sus considerandos todavía más de lo que se acomoda a ellos.

En la medida en que pretende ser ciencia, la epistemología así concebida falta a sus principios. Pero además, en tanto fuerza social, ahoga su potencial virtual y debilita su poder de liberación. En efecto, cada vez son más las prácticas sociales que funcionan "en relación con saberes"; son todavía muchas más las prácticas sociales que estarían en condiciones de recurrir a más saberes. Pero el enclaustramiento cultural de los saberes en la esfera de su producción, al que la epistemología contribuye, no permite sino con dificultad que las instituciones en las que esas prácticas sociales se desarrollan, identifiquen o reconozcan sus *necesidades de saberes*, su naturaleza y grado. En este aspecto, al ubicarse de entrada en un punto que la epistemología tradicional descuida porque la cultura lo ignora, la antropología *didáctica* de los saberes –la didáctica– produce un nuevo sonido, que la teoría de la transposición didáctica amplifica.

He hablado anteriormente, en efecto, de la multilocación de los saberes, de su presencia confirmada en varios tipos de instituciones. Pero ¿de dónde provienen los saberes presentes en una institución dada? Si fueron creados en ella, quiere decir que, casi siempre, se trata de una institución de producción de esos saberes.

Sin embargo, en la mayor parte de los casos, especialmente en los de instituciones "utilizadoras", no ocurre de ese modo. Los saberes allí presentes son claramente *exógenos*. Viven en la institución a través de los agentes de ésta, que han debido formarse en la institución para adecuar a ella sus gestos. Estos agentes deberán continuar su formación, formarse con arreglo a nuevos saberes, formar a otras personas. Lo vemos, estamos aquí en el corazón de la didáctica. En el corazón del *territorio* didáctico, incluso si hemos abandonado el terruño de las didácticas.

Alejémonos ahora un poco de ese espectáculo, tomemos distancia. Inmediatamente el paisaje cambia y nos encontramos de pronto entre conocidos. La mayor parte de las instituciones utilizadoras han segregado o suscitado, en su entorno más o menos cercano, dispositivos de formación que es correcto llamar, genéricamente, *escuelas*. Escuelas –escuelas profesionales, se entiende. Todavía no hemos llegado a la enseñanza general–, es decir, instituciones que están exclusivamente consagradas a la *enseñanza* de los saberes requeridos. De modo que los saberes no son solamente *susceptibles* de ser enseñados; se enseñan y cada vez más... Porque la utilización social de los saberes se ve influida por su enseñanza.

Esa es la forma moderna de la aclimatación institucional de los saberes. En ella consiste, por supuesto, lo esencial de la pertinencia epistemológica (en el campo de la antropología de los saberes) y de la fuerza social (en la producción de nuestras sociedades) de la didáctica.

Volvamos sin embargo a la cuestión del origen de los saberes y reconozcamos que sólo hemos desplazado el problema. Porque ¿de dónde provienen los saberes enseñados? Retomaré aquí una respuesta cuya forma (si no su contenido, en su generalidad) ya había sido planteada en la primera edición de esta obra: de las instituciones de *producción*. ¿Cómo llegan ahora hasta las instituciones didácticas? Por el proceso de *transposición didáctica*.

Sin embargo, esta respuesta sólo sería un decir si no profundizáramos en ella. Semejantes procesos suponen instituciones y agentes y un cierto tipo de manipulación de los saberes. Mencioné hasta aquí tres grandes tipos de manipulación. El mayor aporte de la teoría de la transposición didáctica, su gran descubrimiento –me atrevo a escribirlo–, cuyas consecuencias para la antropología de los saberes no hemos terminado todavía de reconocer, es la revelación de *un cuarto tipo* de manipulación, la manipulación *transpositiva* de los saberes. Se trata también, correlativamente, de poner de manifiesto instituciones *de transposición* de los saberes –las *noosferas*–, esa administración tan deseosa en hacerse olvidar, que parece evaporarse tan pronto como ha producido sus efectos y de la cual nos olvidamos habitualmente hasta el punto de negarla.

Pero la transposición didáctica, tal como la evocamos aquí, debe analizarse en un marco más vasto. Hablaré más generalmente de transposición *institucional*: transposición hacia una institución I que, en tanto I es una institución *didáctica*, es propiamente transposición *didáctica*. Los procesos de transposición institucional exceden sin ninguna duda la transposición didáctica propiamente dicha; pero ya indiqué hasta qué punto toda transposición institucional tiende actualmente a articularse en una transposición didáctica, que es uno de sus momentos cruciales. Los procesos transpositivos –didácticos y más generalmente institucionales– son, tal como se imagina, *el resorte esencial de la vida de los saberes*, de su diseminación

y su funcionalidad adecuadas. Y nunca se subrayaría lo suficiente en ese sentido hasta qué punto la manipulación transpositiva de los saberes es una condición *sine qua non* del funcionamiento de nuestras sociedades, cuyo descuido, particularmente en provecho de la pura producción de saber, puede ser criminal.

Fascinados por la *forma* "escuela" y olvidando demasiado rápidamente la *sustancia* que ella encierra, es decir, los saberes mismos, no nos hemos proporcionado los medios para apreciar el papel de los saberes y de su enseñanza en la formación de nuestras sociedades, ni el lugar de una antropología (didáctica) de los saberes en la antropología. Esa forma, sin duda, no tuvo que ser enteramente inventada[5]. Lleva en sí diversas herencias: la del claustro, la del ejército. Pero son las *necesidades de saberes* las que hay que seguir como la trayectoria principal de nuestra comprensión de esas cosas.

La escuela profesional es el retoño de las necesidades de saberes de nuestras instituciones (utilizadoras). A su vez, genéticamente, ésta *precede* a la enseñanza general. Esta última no es en principio otra cosa que *el retoño de las enseñanzas profesionales*. El río se remonta hasta su fuente. Esta génesis río abajo y río arriba prosigue desde hace siglos y se deja ver, hoy como ayer, ante quien sabe mirar [6].

Porque no se accede *directamente* a un saber, sin otra formación. Ningún sistema de formación lo permite. Todos suponen una cierta homogeneidad de sus públicos; y esa homogeneidad relativa debe ser creada por una formación *previa*. Ese es el objeto esencial de toda enseñanza *general*.

No significa que la formación –profesionalmente ordenada– con arreglo a un saber suponga un aprendizaje cada vez más precoz. (En ese criterio hay mucho más que una fabulación: un fantasma de nuestro tiempo). Porque la elección de las materias, de las materias "fundamentales" sobre las cuales habrán de erigirse las formaciones profesionales, es otra cuestión. Antropológicamente, hay en efecto un "sistema de saberes"; pero ese sistema no tiene el alcance que le presuponía Auguste Comte (quien, creyendo definir "lógicamente" la estructura a priori, sólo estaba registrando un cierto estado histórico de cosas).

Su formación no se explica por medio de características "intrínsecas" de los saberes. Deriva de la estructura de la producción, de la utilización, de la enseñanza de los diferentes saberes y también, por supuesto, de toda la red transpositiva las noosferas, sin la cual los saberes no podrían vivir.

Cuando nos remontamos hacia arriba en los planes de estudio, particularmente cuando llegamos a la enseñanza general –en cualquier nivel de que se trate, es decir, más arriba de cada uno de esos niveles en los cuales se forma una derivación con propósitos de profesionalización–, tiende a distenderse el vínculo, siempre incierto y siempre polémicamente mantenido, entre necesidades de saberes de las profesiones –de las prácticas sociales– y saberes efectivamente enseñados.

Ese vínculo puede deshacerse completamente. La enseñanza general, en especial, es esencialmente frágil porque está constantemente confrontada con una cuestión de *pertinencia epistemológica*, que la histéresis institucional y las fuerzas de la tradición no alcanzan a regular. Si se lo considera según el lapso de algunas décadas, el mapa de los saberes "fundamentales" –presentado ante cada generación de alumnos como menú impuesto– no cesa de modificarse. Pero esos movimientos incesantes son problemáticos en sí mismo. Porque la pertinencia epistemológica, entendida en sentido estricto, y cuyos criterios son a menudo indefinibles, debe ceder terreno en este caso.

La enseñanza general se distingue de las enseñanzas profesionales por su mayor *visibilidad cultural*. Está más *expuesta* que las otras a la cultura, a sus exigencias, a su control. Por lo tanto, la noción de pertinencia epistemológica debe ser sustituida por otras dos, o incluso tres nociones.

En principio, por la de pertinencia *cultural*, que es una forma debilitada (¿insulsa?) de la pertinencia epistemológica, pasada por el filtro de la cultura. Todavía ayer –me refiero al siglo XVIII– "el dibujo" (técnico y artístico); hace ya tiempo, y mañana quizás, "la informática", cuyo proyecto fracasó; hoy, "la tecnología", mezquinamente instalada en el *Collège* y cuyos avatares sucesivos ("trabajos manuales", "educación manual y técnica", etc.) confirman su inestabilidad esencial: tres "materias" que le debieron su promoción, durable o pasajera[7] a dicha pertenencia.

Pero esa pertinencia cultural en sí misma y por sí sola, es impotente. Como sujetos de la cultura que somos, sabemos bien, incluso si nos disgusta, que ésta nunca podrá fabricar más que saberes (enseñados) "de bajo perfil". Carece casi siempre de la *legitimidad epistemológica* que funda la confianza que podemos concederle a un saber en tanto que saber, que le confiere su carácter de saber "auténtico", que le otorga su credibilidad. ¿Qué legitimidad epistemológica le acordarían ustedes, actualmente, a la didáctica de las matemáticas, por ejemplo?

Pero esa legitimidad, evaluada aquí en toda la amplitud del espacio social, y no en cualquier institución particular, se superpone generalmente, pero no siempre, como se verá, a la legitimidad *cultural*. Es entonces cuando reencontramos la noción de saber *sabio*, que ha hecho chirriar tantos dientes.

Tomen la palabra en el sentido que quieran; las matemáticas son ciertamente un saber *sabio*. Sin embargo, hemos olvidado demasiado el hecho de que no siempre lo fueron. "Fango en el que se revuelcan los puercos", las definió doctamente un profesor de la Universidad parisina en el último tercio del siglo XVI. Pero saber, sin duda (la ambigüedad es el signo entonces de que un cierto destino está en juego), y que pretende absorber completamente en tres meses, cuando lucha por obtener la cátedra de matemáticas del *Collège Royal* (nuestro actual *Collège de France*). Lo más interesante del caso es que el Colegio consiente, le concede el plazo de tres meses ¡y la cátedra! [8]

Convengamos en que no es fácil concebirlo, tan profunda es la amnesia: las matemáticas no conquistaron en un día su legitimidad *epistemológica*; ni, con más razón, su actual legitimidad *cultural*, que es una forma expandida de la anterior, un poco vacía, ambigua. Por lo demás, esta legitimidad le llega a las matemáticas en la época clásica, al mismo tiempo que éstas ganan su espacio en la enseñanza general, la de los colegios del Antiguo Régimen. Promoción cultural y promoción social van aquí a la par.

Vemos que el título de sabio no pertenece jamás *intrínsecamente* a un saber. Es otorgado por la cultura y puede perderse. En resumen, un saber no es sabio porque sus productores sean "académicos": es exactamente lo inverso lo que es cierto.

A pesar de eso, ese título es valioso y trae consigo muchos privilegios. De ellos se derivan las estrategias de *academización*, perceptibles, en ciertos casos, a simple vista. De esa manera, cuando en los años que preceden a la Revolución, Gaspard Monge crea la *geometría descriptiva*, no busca otra cosa que "academizar", coronar como verdadera ciencia, como ciencia indudable, ese monumento construido por los siglos, el arte del dibujo (técnico), que ha obsesionado a la sociedad francesa como una promesa de futuro desde por lo menos la segunda mitad del siglo XVII y que Monge pretendía instalar duraderamente en la más alta cultura otorgándole sus blasones de nobleza científica.

¡Empresa loable y que desde el principio entusiasma al círculo de los iniciados! Así, Comte, que entonces no tenía más de veinte años, y accedió en la *École Polytechnique* a la enseñanza que Monge creara, y que sueña con la América de Benjamin Franklin, a donde el nuevo saber todavía no había llegado, escribe febrilmente el 13 de octubre de 1816: "Llevaré a esos republicanos una ciencia completamente nueva para ellos". Pero la tentativa, tal como se pudo ver rápidamente fuera de Francia, resultó un fracaso a medias. Y hoy como ayer, con o sin geometría descriptiva, el dibujo se presenta culturalmente como un saber "medio". Como lo son también y a pesar de todo el bien que les deseemos, la informática o la tecnología de nuestras escuelas. El saber sabio no puede autoproclamarse.

Indudablemente, el esquema presentado en la primera edición de esta obra y que se mantuvo sin modificaciones en las páginas reproducidas más arriba, no es el esquema más general de la transposición didáctica de los saberes, incluso restringida a la enseñanza general. Como se ha ido viendo, esta última parece mantener obstinadamente un nicho propio para acoger los saberes *medios*. Pero sucede que los numerosos comentadores, enredándose más que en argumentos en los melindres ideológicos de estas últimas décadas, no han sabido entender que el carácter académico o no (o semiacadémico, etc.) de los saberes a enseñar, es una condición crucial de la ecología *didáctica* de los saberes; que existe toda una *patología didáctica* específicamente asociada al carácter más o menos *no sabio* del saber que puede reivindicar una materia enseñada, aunque más no fuera eligiéndola como epónima.

Es verdad que toda patología tiene sus beneficios secundarios. Todo triunfo tiene su costado sombrío. Pero, después de todo, pensándolo bien, es preferible recurrir a un saber sabio. Porque la presencia de un saber de nobleza cultural incierta en la enseñanza *general*, se torna rápidamente problemática. Y finalmente, la enseñanza de ese saber se vuelve tan incómoda que resulta casi imposible.

La razón esencial de ese tipo de "disfuncionamiento" es, creo yo, simple y profunda a la vez. La enseñanza general es una cuestión que no atañe a una institución particular –la de una "profesión", por ejemplo– sino a la sociedad en su conjunto; o al menos, en un momento dado de su historia, a todo cuanto para ella es importante. *La escuela no se autoriza a sí misma*, y menos todavía el docente. Incluso si se trata del ejercicio de gestos de apariencia "técnica". La sociedad está con ella (y con él) o bien contra ellos. (La cuestión no es privativa de la Escuela: el principio vale de manera similar para muchas otras de nuestras instituciones: la Policía, el Ejército, la Justicia, por ejemplo.)

Lo que ocurre en la Escuela depende por tanto eminentemente de la legitimidad que la sociedad le concede o le niega. Y es entonces cuando se dan a conocer las virtudes de un saber sabio. Porque el carácter sabio de un saber posee en sí mismo, en ese sentido, un valor liberador. Da por cumplida una deuda de legitimidad "societal" del enseñante, aligera sus gestos, le provee de una seguridad cultural fácilmente reconocible. Contrariamente, cuando la deuda se hace demasiado pesada, alimenta una molestia evidente, difusa, inmanejable, que a veces se manifiesta en algunas disciplinas como un estado mental obsesivo que se expresa en profesiones de fe con valor apologético, sempiternamente insistentes que algunas veces se superponen usurpadoramente al tiempo mismo del acto de enseñanza.

Semejantes apologías florecieron antaño en el campo de las matemáticas [9]. Pueden reaparecer mañana, no sólo en los alrededores del aula (donde no han cesado de estar), sino en el aula misma, entorpeciendo el gesto del docente. Desde

ese punto de vista, no existe ningún derecho eternamente adquirido. Pero ese valor vital que, en el análisis objetivo de la ecología didáctica de los saberes es preciso reconocer al carácter "académico" del saber a enseñar, revelará su verdadero alcance si examinamos el criterio esencial que subyace al principio de "elección" de las materias "fundamentales".

Ya he dicho que los vínculos funcionales entre saberes y prácticas sociales tienden a disolverse cuando nos encontramos en el terreno de la enseñanza general. La distancia, al mismo tiempo temporal y social, entre unos y otras no permite que su relación se vuelva ostensible. Pero todavía hay algo mejor, si es que puede calificarse así.

Los saberes que consideramos "fundamentales" –no sin polémicas y riesgos de error, por supuesto– *lo son ya*, de una cierta manera, *fuera de la escuela*, en cuanto a que, aun cuando parecen indispensables para el funcionamiento de la sociedad, para su reproducción o para su producción a mayor escala, su efectividad no nos resulta en absoluto *socialmente visible*.

Cada uno de nosotros puede conocer la efectividad de la medicina o del derecho; pero no tratamos con el matemático o el historiador como tratamos con el médico, el juez o el abogado, cuyos "gestos" reenvían para nosotros a supuestos saberes, presentes *in absentia* a través de ellos. En la medida en que un saber no aflora en las prácticas sociales más extendidas, en la medida en que la opacidad del funcionamiento social nos oculta su efectividad, la cual sin embargo presentimos, lo consideramos como una de las piezas sobre las que se funda el juego social, como un *fundamento*.

Los saberes que consideramos fundamentales son saberes socialmente imprecisos, casi invisibles y por lo tanto, *culturalmente frágiles*. Por eso, al menos, artificial y voluntariamente, la sociedad nos los hace ver en su Escuela, para fortalecerlos y ayudarlos a vivir. Porque la Escuela es ante todo una vitrina de la sociedad, en la que ésta expone sus saberes "sensibles"; un hábitat con una ecología particular, prioritariamente organizada en torno a ellos y que, contra los modernos adoradores de la Escuela-centrada-en-el-niño, nos recuerda que los individuos somos antes que nada seres sociales y por ende "escolentes"* [10].

La Escuela, de la que decimos demasiado frecuentemente que está fuera del mundo, se ubica así *en el centro mismo de la vida de las sociedades*. La trayectoria escolar en ese sentido es una visita guiada, más o menos impuesta actualmente, a los *fundamentos epistemológicos del todo social*; un tributo que pagamos colectivamente al funcionamiento de nuestras sociedades.

Llegamos así a percibir el tipo de aportación que promete a nuestro conocimiento de las sociedades –quiero decir, la manera en que los hombres viven– una antropología *didáctica* de los saberes. Vemos también que la variedad de los saberes, la fragmentación estructurada de los conocimientos que éstos instituyen, el sistema que forman y su grado de integración e inclusive su existencia misma, no se encuentran en absoluto programados en una presunta "naturaleza intrínseca" o preformados en una supuesta especificidad a priori de los saberes. "Lo que es específico del conocimiento" no es un punto de partida del trabajo del didacta: es un centro de referencia. Y esa especificidad debe ser teóricamente conquistada y elaborada.

¿Qué diferencia hay en nuestra enseñanza general entre "las matemáticas" y "el francés", por ejemplo? Culturalmente, esta pregunta sólo podría formularse como una humorada, hasta tal punto los consideramos absolutamente opuestos. Aproximar las *matemáticas al francés*, se dirá, es como unir el

* N. del T. El autor utiliza un juego de palabras juntando el prefijo *"scol"* (de *scolaire*) con el sustantivo *êtres* (entes).

agua y el fuego, la carpa y el conejo o celebrar la boda del paraguas y la máquina de coser!

Sin embargo –creo haber insistido bastante en ello– eso no basta para fundar una especificidad *didáctica*. La que debe hablar aquí es, naturalmente, la teoría didáctica. Escuchémosla un instante.

En función de lo que precede, al menos, parece precisamente que habría que comenzar por observar no una oposición sino más bien una *comunidad de destinos*. Una y otra materia, en efecto, se presentan en nuestra Escuela como materias fundamentales y por lo tanto, materias "notables". En principio, es eso lo que las aproxima.

Ustedes notarán quizás que he hablado de "materias"; la variante terminológica me es muy útil aquí. Porque ¿acaso podemos hablar verdaderamente de *saber*, a propósito del francés? ¿"El francés", es un saber del estilo de las matemáticas?

Efectivamente, todo parte de allí. *La lengua*, "la lengua que hablamos", es conocida por el hablante nativo, como una *práctica social*, a la que llamaré *el habla* utilizando la terminología de Saussure pero sin estar enteramente de acuerdo con dicha concepción. "La lengua" –el francés, por ejemplo– es aquí lo que llamo un *dominio de realidad*. Los actores de esa *institución* que es la sociedad francesa, poseen una cierta *práctica social* –"hablar francés", es decir "hablar", simplemente– en relación con ese *dominio de realidad* que es "el francés", "la lengua francesa".

Esa práctica pone en evidencia conocimientos, pero no todavía un saber. Todos somos más o menos competentes en nuestra lengua. Y cualquier hablante nativo podrá reconocer que tal otro es más competente que él. Uno puede arreglárselas más o menos bien con las palabras, pero allí no hay todavía nada que saber.

La situación no tiene nada de original, nada de específico respecto de ese dominio de realidad y de esa práctica social relativa a ese dominio de realidad. Tampoco es original -sin embargo se trata aquí del hecho esencial- que en un momento dado de la historia de la institución considerada, nazca *un saber de ese dominio de realidad* (en este caso, la lengua) y que sea, o se pretenda, *congruente respecto a una cierta práctica social* (en este caso, la del habla) de ese dominio de realidad, que organiza sus conocimientos e inspira su ejecución.

Pero sin embargo podría ocurrir perfectamente que no existiera un saber semejante. Aun si constituyera, si extendiera su imperio sobre el habla nativa, al cabo del tiempo también podría deshacerse, perderse completamente para renacer, en otro momento, con diversa fortuna. Basta con pensar en esas lenguas de Francia que llamamos regionales (o minoritarias, marginales, marginalizadas, etc.), que al ser consideradas por sus propios hablantes como simples *dialectos*, se refugian en una labor de resistencia, dejan de ser cultivadas, se evidencian como pura habla y experimentarán, algunas veces, en su hundimiento, inciertos renacimientos letrados.

Volvamos al francés: ¿dónde se oculta el saber que yo evocaba?

Ese supuesto "saber del francés", o mejor dicho ese "saber del habla francesa" –volveré luego sobre esas expresiones curiosas y un poco torpes– no nace por sí mismo. Ha sido preciso alumbrarlo. Su nacimiento es una epopeya que une lo político (Francisco I y la ordenanza de Villers-Cotterêts, el 15 de agosto de 1539) con lo poético (Du Bellay y su *Défense et illustration de la langue française*, en 1549). Una epopeya que supone sobre todo por parte de sus artífices, un deseo de saber, una pulsión epistemofílica que busca su objeto bajo la sombra formidable de los modelos del griego y del latín.

En 1540 se suma Etiennne Dolet, quien hasta entonces

sólo se había ocupado del latín. Ahora desea trabajar para la construcción del francés, en la que otros trabajaron antes que él. "Por lo tanto, no sin tener en cuenta el ejemplo de muchos personajes excelentes –le escribe a su protector– emprendo ese trabajo. El que (...) recibirás no como algo perfecto en la demostración de nuestra lengua, sino solamente como un comienzo de. Porque sé que cuando se ha querido tornar la lengua griega y latina en arte, la tarea no fue en absoluto [*realizada*] por un hombre sino por varios. Así se hará igualmente, para la lengua francesa; y poco a poco, por medio del trabajo de las gentes doctas, ésta podrá conseguir igual perfección que las lenguas antedichas".

Nos encontramos aquí, un ejemplo entre otros, con una declaración de nacimiento anticipada de nuestro "saber del francés". Que se pretende académica. Y que deviene académica. Efectivamente, abandonemos esos *Prèmieres combats pour la langue française* [11]; y saltemos unos cuantos siglos.

Ese saber del francés respeta la ley de todo saber; hace oír su diferencia, se establece a cierta distancia del habla francesa. Cuando el hablante nativo dice: "Ella se hizo llevar a casa de su padre", Dumarsais, en 1810, restablece doctamente la verdad: "Ella ha hecho esto: alguien la conduce a casa de su padre"[12]. Poco importa cuán grotesca nos parezca esta explicación: ¡la extrañeza misma del enunciado oficia como presunción de saber!

Ese saber tendrá, además, sus partes, que lo estructuran de modo que pueda aprenderse por etapas: gramática, luego retórica, al igual que anteriormente, el álgebra sucedía a la aritmética. Lo hemos dicho ya; el modelo no es nuevo. Pero nos proporciona un saber que tendrá sus horas de gloria durante largo tiempo y a partir de allí se impondrá. En adelante, podremos "saber el francés" y no conformarnos con ser simplemente más o menos buenos conocedores. También podremos *enseñar el francés*, es decir, enseñar ese "saber del francés" que varios siglos produjeron y que hemos visto vacilar.

Se trata de una larga saga que recientemente se ha intentado "desinflar", mostrando lo arbitrario de sus solapados artificios. Dado que, súbitamente desde el final del XIX, en algunas décadas, la pertinencia cultural de esa gran construcción se derrumba. La retórica, que la "estilística" prolongará débilmente, se muere. La legitimidad epistemológica pronto se resquebraja. Al ampliarse el imperio del continente de las ciencias, su imperialismo abre nuevos territorios; la lingüística pretende instalarse en ellos, denunciar al intruso, expulsar al falsario. Finalmente se desvanece la legitimidad cultural, que actualmente sólo conocemos fragmentariamente, del "buen uso" caro a Vaugelas, herido de muerte desde hace treinta años por el relativismo lingüístico que convierte en pares a todos los usuarios de la lengua.

¿Enseñar "el francés" a todos los niños franceses? ¿Qué enseñar en lo sucesivo? ¿Un saber ilegítimo? ¿O bien un saber de reemplazo? ¿Acaso la lingüística, *scienza nuova* convincente, dominadora y segura de sí misma? Saussure, el padre fundador, había distinguido la *materia* (el habla) y el *objeto* (la lengua). Pero esa operación equivalía a designar una parte por el todo: la lengua saussureana está *en* la lengua pero no es *toda* la lengua. En especial –Saussure, en un sentido, nos lo había advertido– "la lingüística" (con sus divisiones) no es un saber *del* habla, sino en el mejor de los casos, un saber *sobre* el habla (veremos que la distinción no es oportunista). No puede retomar por su cuenta, incluso si es especificada como lingüística francesa, la función que tenía el antiguo saber *del* francés. (Sin embargo, por su apariencia normativista, la lingüística de Chomsky hubiera podido pretender una transposición didáctica funcionalmente adecuada; y no está establecido que haya renunciado completamente a esa empresa.)

Enseñar el francés se torna poco a poco imposible. El malestar se instala. Tomará tiempo recuperarse. Sin embargo, hay recuperación. Desde hace algunos años, la antigua retórica levanta cabeza y retorna a la Escuela[13]. Renace de sus cenizas un saber del francés que busca hoy, quizás oblicuamente, una investidura espistemológica y cultural sin la cual carecería totalmente de valor.

No importa cuán pobre parezca a los ojos del especialista mi breve crónica de los hechos, aquí la detendré, para volver a ocuparme de la enseñanza de una didáctica de los saberes. No hay nada de original en ello, repitámoslo una vez más. Dije que las matemáticas y el francés son materias notables. Como punto de partida están las prácticas sociales: prácticas matemáticas, por un lado; prácticas del lenguaje, por otro. Son prácticas que la Escuela, a través de los saberes que procuramos enseñar en ella, tiene como misión mantener, enriquecer, desarrollar, fortalecer, porque, digámoslo sin vergüenza, la Escuela ocupa el corazón de la sociedad.

Las prácticas matemáticas y las prácticas de lenguaje son igualmente invisibles, pero por razones opuestas. En un caso, la no visibilidad deriva de la *opacidad* social de una actividad rara, improbable y sin embargo esencial. En el otro, se identifica con la *transparencia*, con la inmediatez de una actividad en la que, "hablentes"*, estamos todos sumergidos completamente y sin retorno. Pero ocurre que entre un saber y una práctica hay una distancia nunca enteramente abolida. (De modo que existe siempre una distancia entre la *escuela profesional* y la *profesión*: el aprendizaje en el lugar de trabajo, la aculturación profesional, por más que la formación escolar tienda a reducir su papel, no dejan de ser necesarias.)

*N. del T. El autor utiliza un juego de palabras usando el verbo *parler* (hablar) y el sustantivo êtres (entes).

El saber *de un* dominio de realidad es un saber *sobre* las prácticas sociales relativas a ese dominio de realidad, que posee indudablemente su *pertinencia* para esas prácticas. Pero su *congruencia* respecto de ellas, aquello que lo constituiría en un saber *de* esas prácticas, nunca está asegurada. Incluso en el caso de las matemáticas, se hacen oír regularmente algunas objeciones. (Ramus, en la segunda mitad del siglo XVI, hizo de éstas un generoso comercio.) Sin embargo, la observación no es sospechosa, si bien queda por aclarar: las matemáticas como saber, cuya construcción no se ordena según prácticas *utilizadoras* de matemáticas (aunque reciba su estímulo), suelen estar muy de acuerdo con éstas, un hecho que Eugen Wigner bautizó otrora como *la irrazonable efectividad de las matemáticas**.

Pero el saber de la *lengua* francesa que elabora la lingüística es sólo muy mediocremente saber del habla francesa. Ante todo y sobre todo, es un saber *sobre* "el francés". Henchido de legitimidad epistemológica, carece al respecto de *pertinencia* epistemológica. También carece –se trata de cosas relacionadas– de la pertinencia y la legitimidad culturales que son las únicas que podrían instalarlo como vencedor, en la Escuela. Porque, atrapado en la lógica moderna de las ciencias, ese saber se presenta a priori como *autónomo en relación con las necesidades de la Escuela* (las que a su vez son el eco de ciertas necesidades sociales), mientras que el antiguo saber del francés era, casi por definición, si puedo decirlo, un "saber de Escuela", constituido fuera de la Escuela –aunque a menudo no lejos de ella– pero hecho para la Escuela, fruto de lo que he denominado una contra-transposición didáctica[14], elaborado desde un principio como un saber del *habla francesa*. (La *Grammaire de Port-Royal*, obra didáctica demasiado desconocida como tal, nos lo dice sin ambages: "La gramática", escriben sus autores en 1660, "es el arte de hablar".)

* N. del T. En inglés en el original.

La empresa a decir verdad era arriesgada. Y podemos sorprendernos con justicia de que haya resistido tanto tiempo a todos los asaltos. Porque los ejemplos no constituyen una legión de contra-transposiciones logradas. El sistema de los saberes no es el pleonasmo del sistema de las prácticas. No son suficientes la suposición de un saber ni la necesidad y el deseo que tenemos de él o la denominación que se le otorga.

En el siglo XVIII se ha podido soñar con una *ciencia del ingeniero*, título de una obra de Bélidor. A comienzos de nuestro siglo, Durkheim, sin detenerse demasiado en ello y aunque ocupaba entonces en la Sorbona una cátedra con el mismo nombre, evoca la posibilidad de una *ciencia de la educación*, avatar hipotético, teórico y modernizado de la incansable *pedagogía*. ¡Cuántos deseos de saber puestos en palabras! Pero esa ciencia de la educación, de haber vivido, hubiera sido criticada duramente por las actuales didácticas. La Escuela, profesional o general, no siempre tiene los medios *epistemológicos* para realizar sus ambiciones. La enseñanza del francés, entre otras, experimenta todos los días esa situación.

He aquí, me parece, la manera en que podemos comenzar a elaborar, partiendo exclusivamente de los elementos de teoría didáctica anteriormente enunciados, la diferencia específica entre el francés y las matemáticas. Vemos la necesidad de convocar para esa tarea a la didáctica de los saberes, que, dialécticamente, al tiempo que esclarece su especificidad, se nutre *de las didácticas* (de las matemáticas, del francés, etc.), cuyas particularidades subsume en forma de universales que permiten fundar la singularidad de aquellas. Como toda ciencia, las didácticas "particulares" sólo pueden fundarse y construir su objeto avanzando; pero ese avance supone una *solidaridad epistemológica* que, hasta hoy, ya lo he dicho, no ha sido suficientemente reconocida.

Para referirme en lo sucesivo a la didáctica *de las matemáticas*, examinaré ahora dos cuestiones esenciales: la de su *pertinencia epistemológica*; la de sus *condiciones de posibilidad*, dejando al lector interesado la iniciativa de trasladar adecuadamente las consideraciones que este examen sugiere.

Con el propósito de especificarla, retomaré en principio la serie conectada de campos en los que la didáctica delimita su propio dominio. Partamos aquí de la antropología de los saberes o epistemología. Por especificación, obtenemos la antropología (o epistemología) *de las matemáticas*. ¿Cuál es su objeto? No "las matemáticas" como saber, sino de manera englobante las *prácticas sociales matemáticas*. O más bien aquello que denominaré por medio de un neologismo, las prácticas sociales *con matemáticas*, que se realizan en esas instituciones a las que llamo instituciones *con matemáticas*.

La antropología *didáctica* de las matemáticas se dedica a explicar, entonces, en las prácticas sociales "con matemáticas", esos vórtices que la *didáctica* profundiza incesantemente, es decir, en los momentos en los que se afirma una intención de aprender o enseñar un objeto de saber matemático.

Vemos entonces que el *territorio* de la didáctica de las matemáticas es inmenso, y los *terrenos* del didacta de las matemáticas se encuentran *virtualmente en todas partes en el espacio social*. Como ya hemos observado, ese territorio excede notablemente el *terruño* originalmente concedido: el de las enseñanzas escolares (generales o profesionales) de las matemáticas; penetra el conjunto de los usos de las matemáticas; infiltra la infinidad de los espacios en los que el saber matemático es pertinente y se observa su manipulación.

En esa ampliación del campo de nuestro estudio, uno de los hilos conductores esenciales es el de los saberes *con matemáticas*, saberes cuya manipulación supone, en mayor o menor grado, la manipulación de matemáticas vivientes, es decir, un número de saberes que aumenta incesantemente.

*N. del T. En sentido equivalente a un dispositivo que funciona con o mediante las matemáticas.

En ese sentido, la didáctica de las matemáticas se presenta como un saber pertinente *para el conjunto de las prácticas sociales con matemáticas* y en especial, para una mayoría en expansión de prácticas sociales *de saber*. De manera que la utilización de la didáctica de las matemáticas como saber no es en absoluto el patrimonio de los enseñantes ("escolares") de matemáticas. Y podemos observar, sin paradoja alguna que en la medida en que esos enseñantes deben trabajar dentro de sistemas sumamente reglamentados, bajo condiciones relativamente estandarizadas, de evolución relativamente lenta, con un margen de maniobra limitado, forman parte de los "manipuladores" de las matemáticas a quienes la didáctica de las matemáticas, por sí sola y en proporción a la densidad de lo didáctico que deben administrar, ofrece el más pobre auxilio.

Creemos que la didáctica de las matemáticas adquiere su máxima pertinencia fuera de ese ámbito, en otros niveles del sistema de *producción* de los sistemas de enseñanza. Más lejos todavía, en todos los sitios en los que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas deben afrontar condiciones no normativizadas, sin público, sin conocimientos anteriores, sin condicionamientos institucionales: en las empresas, las oficinas, los laboratorios; en la manipulación, más general, de saberes que quizás no sean matemáticos pero que sin embargo funcionan *con matemáticas*.

¿Qué conclusión sacar? Esta afirmación se considerará una provocación, tal vez se la experimentará como una agresión contra la cultura de numerosas instituciones, pero, a la luz de todo lo dicho, me parece absolutamente incuestionable. Plantearé por lo tanto aquí que la didáctica de las matemáticas es una levadura que de ahora en adelante debe introducirse dentro de la masa de toda formación *fundamental* en matemáticas. Naturalmente, en la formación del profesor de matemáticas, pero también en la formación del matemático o del usuario de matemáticas, especialmente en la formación de los ingenieros. Incluso, más ampliamente, en la formación de todos aquellos que algún día, de algún modo, tendrán que "manipular las matemáticas".

Eso significaría poner en marcha una vasta transformación de las condiciones de vida y de desarrollo de las matemáticas en nuestras sociedades. Sin duda, la antropología de los saberes, la epistemología, tendrá algunas cosas que decir sobre esa conmoción que provoca en la cartografía de los saberes la emergencia de un saber nuevo, históricamente inédito, sobre su uso, su transposición, su enseñanza, y también por supuesto sobre su *producción*. Consagraré ahora algunas líneas a ese último tema.

La institución que por consiguiente tomaré en consideración es la de la *investigación* en didáctica de las matemáticas; institución en la que se manipula la didáctica de las matemáticas y muchos otros saberes con la finalidad de producir didáctica de las matemáticas. Pero antes de ir más lejos sobre ese punto, se hace imprescindible una observación.

La didáctica de las matemáticas, tal como dije, es un saber. Sin embargo, hay más. Algunos de sus mejores artífices concibieron para ese saber que hemos visto crecer y fortalecerse desde hace un cuarto de siglo, una ambición de mayor envergadura. Han pretendido que fuera un saber de un género muy particular. Han querido que ese saber fuera una *ciencia*.

Todo parece dicho con la palabra "ciencia". Y sin embargo todo queda aún por decir. Porque se trata de una palabra que la cultura no comprende ya muy bien, una palabra que no sabe ya si emplear con reverencia o con desdén, ante

la cual la vemos vacilar entre la emoción, la indiferencia y el arrebato. ¿Deberíamos burlarnos o incluso irritarnos ante una declaración de intención tan enfática y tan arrogante? ¿O simplemente sonreír ante su conmovedora y despreocupada inocencia? Esa ambivalencia es un síntoma: la cuestión del lugar de las ciencias entre los saberes ha perdido actualmente su pertinencia cultural. Yo afirmo aquí que en cambio conserva toda su pertinencia epistemológica. Se me perdonará sin embargo que sólo me explaye parcialmente sobre el tema y sobre un punto en particular.

Este es el asunto, condensado en una fórmula: la construcción de una *ciencia* implica que haya *investigación*, pero *es falsa la afirmación recíproca*. El compromiso por el cual hubo en un tiempo personas que se dieron a elaborar una *ciencia de lo didáctico*, cualquiera fuera la incertidumbre de la empresa, implicaba por lo tanto que se hiciera investigación; ¡y además entonces había que construirlo todo o casi todo! Pero en esa etapa del proyecto surge una divergencia. Sin duda, se trata de una diferencia pequeña y sumamente sutil. Pero que merece que nos detengamos en ella.

Efectivamente, existe una cierta investigación –¿por qué negarle ese nombre?– sobre la enseñanza de las matemáticas, por ejemplo, *que no se fija para nada como objetivo la construcción de una ciencia*. Cuestión de reglas de juego, sin duda. Pero las comunidades de investigación a las que me refiero aquí, no siempre supieron evitar la equivocación. No es seguro que se hayan comportado en todo momento como comunidades *científicas*, consagradas a la construcción de una ciencia.

Retomemos: investigación no implica ciencia. Esto no tiene nada de singular. Culturalmente, todo puede ser hoy objeto de investigación, si bien no de ciencia. Este fenómeno cultural adquirió impulso a partir del modelo de las ciencias de la naturaleza, de las ciencias "históricas" a las que debemos nuestra actual noción de cientificidad. Pero, poco a poco, a semejanza de éstas pero con un tono moderado, se impuso otro paradigma. Su pertinencia cultural es actualmente prodigiosa. Como consecuencia de su hegemonía, multitudes de investigadores escrutan cada parcela del universo, para arrebatarle su opacidad, para echar sobre éste una luz indiscreta. (Ya Claude Bernard, en su *Introducción a la medicina experimental* se burlaba de los procedimientos de esa investigación, entonces y por mucho tiempo apasionada por las estadísticas, que Bernard nos describe de forma caricaturesca buscando la clave de lo viviente en el análisis de la "orina europea promedio", obtenida por extracción "en un mingitorio de la estación de ferrocarril por donde pasan personas de todas las naciones".)

Esa investigación, por lo tanto, produjo estudios, pero no ciencia. la cuadrícula perfecta, el entramado de la naturaleza y del mundo social que se estrecha incesantemente, son su horizonte inalcanzable y su insuperable promesa. Estudios, otra palabra fetiche: así es que tenemos hoy estudios *feministas* *, no una "ciencia de la mujer". Pero Freud y Marx, que "investigaron", tuvieron ambos la intención de construir una ciencia. (Poco importa aquí que se haya podido rechazar esa común ambición). Porque ellos se inscribieron en otro paradigma, hoy parcialmente olvidado, y cultivaron la discontinuidad, cuando el espíritu de los tiempos nos lleva a pensar en la continuidad.

La construcción de una ciencia, sin duda, se nutre de estudios, que proveen los materiales de la construcción. Pero los genetistas no estudian la *drosophila* por sí misma, como tampoco lo hacen los neurofisiólogos con el pez torpedo ¡sino con la intención de extender inmediatamente sus investigaciones a todos sus congéneres!

* N. del T. En inglés en el original.

Por lo demás, el problema pierde su sentido cuando se lo formula en relación con el investigador individual; pero vuelve a adquirir toda su significación cuando se trata de *comunidades de investigación*. Y será preciso, para combatir la hidra de una investigación seducida por ella misma, reanimar la expresión investigación *científica*, devolverle su exacto valor, extraerle los depósitos exteriores, liberarla de la retórica interesada que la encierra en la ambivalencia cultural. Será preciso, contra los tabúes y la incomprensión que la cultura nos infunde, recordar la regla que establece el objetivo –*hacer ciencia*– y señala la ambición. Investigación científica: investigación, entonces, ordenada hacia la construcción de una ciencia. Es en ese sentido, cuando menos, en el que hablaré aquí de investigación.

Las relaciones que postulé más arriba entre la didáctica de las matemáticas y algunos otros saberes (antropología, didáctica cognitiva, epistemología, epistemología de las matemáticas, didáctica de los saberes, otras didácticas) esbozan un esquema que puede ser objeto de una doble lectura.

Por un lado, desde el punto de vista de la ecología de los saberes, ese esquema precisa el *nicho* de la didáctica de las matemáticas, haciéndola aparecer como una punta del continente antropológico introducida en el "universo matemático", carácter que designa su especialización dentro de la antropología.

Por otro lado y recíprocamente, esas relaciones permiten enunciar algunas de las condiciones de posibilidad de la didáctica de las matemáticas, en tanto representan algunas de las necesidades de saber que atraviesan, sin duda desigualmente, todas las instancias de su vida social: producción, transposición, enseñanza, utilización. Pero no podremos deducir sin más, en ningún caso, el hábitat o mejor dicho, *los di-*

* N. del T. En inglés en el original.

ferentes tipos de hábitats que son más apropiados para su desarrollo y para el ejercicio de sus funciones. El lector apresurado por entender más de prisa, puede haberse equivocado sobre ese punto.

Observaré primero que el tipo de necesidad de saber más apremiante para la investigación en didáctica de las matemáticas es quizás la *necesidad de matemáticas*. Los didactas de las matemáticas son usuarios de matemáticas y lo son de un género históricamente inédito. En este sentido, la investigación en didáctica de las matemáticas ha hecho emerger laboriosamente, a lo largo de un período de más de veinte años, una problemática que le es propia, aunque a muchos de sus artífices les cueste tomar conciencia de ella y más todavía asumirla. (En relación con este fenómeno, el análisis de la transposición didáctica y más ampliamente el análisis de la ecología de las matemáticas enseñadas –al que no he podido hacer aquí sino unas pocas alusiones fugitivas– son una ejemplar piedra de toque.)

Las necesidades de saber de una disciplina de investigación constituyen al mismo tiempo condicionamientos que pesan sobre la organización de los hábitats apropiados para el desarrollo de esa disciplina. Los hábitats de la investigación en didáctica de las matemáticas también deben proporcionar a sus ocupantes las relaciones necesarias con el conjunto de los universos de saber, sin cuya aportación la producción está condenada a empobrecerse y, naturalmente, esto vale también para las matemáticas.

Sin embargo, es por otra razón por la que defenderé aquí el hecho de que una gran parte de la investigación en *didáctica de las matemáticas* deba realizarse en el entorno inmediato de las instituciones de investigación *en matemáticas*. O, recíprocamente, que el entorno inmediato de la investigación en didáctica de las matemáticas debe ser rico en actividades de producción de matemáticas.

Naturalmente, sólo me estoy refiriendo a la implantación principal. La pertinencia epistemológica de la didáctica de las matemáticas, que he enseñado suficientemente, su presencia deseable en tanto saber pertinente en el conjunto de las instituciones de investigación "con matemáticas" (incluidas las instituciones de *investigación en matemáticas*) –que son además, para el didacta, tanto áreas de investigación como de intervención– exigen una investigación deslocalizada en didáctica de las matemáticas, cercana a los lugares en donde se la utiliza socialmente, cuya proximidad debe poder forzar.

Pero volvamos a la cuestión de su implantación principal. El motivo de esa implantación nos permitirá reencontrarnos con una vieja conocida. Puesto que en verdad todo tiende a que las matemáticas sean un saber sabio. Y la antropología de los saberes nos aportará, en este punto como en muchos otros, el esclarecimiento.

En el caso de un saber sabio, en efecto, la esfera de la producción llega a asumir, especialmente por medio de la Escuela y de la transposición didáctica, una función mucho más amplia que la de la producción *stricto sensu*. Función que se realiza más o menos indirectamente y que deriva del poder epistemológico o cultural adquirido, de investidura, de gestión, de control, de asunción del *conjunto de las prácticas sociales* (y de las instituciones que las albergan) *en el que ese saber se pone en juego*. De ese modo, la razón invocada es tanto de orden metodológico como epistemológico.

La esfera de la investigación en un saber *sabio* es un mirador desde el que se pueden observar y en el que siempre terminan por encontrar algún eco los movimientos que afectan al mundo complejo y naturalmente opaco de las prácticas de ese saber. Todo tiende a remontar hacia allí, porque todo tiende a buscar la investidura epistemológica y cultural del saber sabio que allí se produce.

Sin duda, esto no significa que desde ese punto todo sea igualmente visible. Pero los lugares en donde se realiza la investigación en matemáticas se presentan como el centro operativo por excelencia, el cuartel general desde el cual el didacta de las matemáticas tiene la posibilidad de abarcar su territorio más vasto, antes de descender hacia los terrenos de sus investigaciones, a veces social y culturalmente muy apartados.

En un primer momento, la intrusión de ese recién llegado suscita, sin duda, cierta incomodidad. Contra ese arcaísmo de los sentimientos, la modernidad epistemológica pronto lo impondrá, según creo, como un personaje evidente de la vida de los saberes.

Referencias

Capítulo 1

- Sobre el paso de lo *implícito* a lo *explícito*, véase Blanché (1970), pp. 13-16.

- Sobre la noción de transposición didáctica en general, véase Verret (1975), pp. 140-144.

- Sobre la transposición didáctica de la noción de distancia, véase Chevallard y Johsua (1982).

Capítulo 2

A las referencias dadas en el texto, añado las siguientes indicaciones:

- Sobre la noción de *sustitución didáctica de objeto*, véase Verret (1975), pp. 176-182.

- Sobre la *ilusión de la transparencia*, véase Bourdieu *et al.* (1973), pp. 29-34.

Capítulo 3

- Sobre el análisis freudiano de la resistencia al psicoanálisis, véase Freud (1933), pp. 137-147.

Capítulo 4

- Sobre la distinción objetos matemáticos/objetos paramatemáticos, véase Chevallard (1979b).

- Sobre el nivel *protomatemático*, véase Chevallard (1979a).

- Sobre lo implícito en la lógica práctica, véase Bourdieu (1980), pp. 24-29.

Capítulo 5

- Sobre la aplicación de las condiciones de escolarización de los saberes al campo de los "saberes del hombre", véase Verret (1975), pp. 160-176.

Capítulo 6

- Sobre el poder productivo del tiempo escolar, véase Verret (1975), pp. 100-105 y 109-123.

- Sobre la noción general de *contradicción*, véase Karsz (1974), pp. 131-138.

- Sobre la *sobredeterminación* de la contradicción principal en el seno de un *complejo de contradicciones*, véase, en relación con el análisis particular de una situación particular, Schneider (1979).

- Sobre la noción de *transacción*, empleada en otro contexto diferente del que se ha considerado aquí, véase Eco (1965), pp. 43-48 y 94-108.

- Sobre la "interpelación de individuos concretos como sujetos", véase Althusser (1976), pp. 110-116.

Capítulo 7

- Sobre el vaciamiento de los contenidos del saber en la *New Education* norteamericana, y especialmente en el marco del *Life Adjustment Movement*, véase Hofstadter (1963), pp. 329-358.

- Sobre el análisis, fechado, de la relación didáctica en términos de "relación enseñante/enseñado", véase para un ejemplo sintomático, Lourau (1969), pp. 27-30.

- Sobre la estructura del poder, véase Foucault (1977).

- Sobre la "productividad" del poder, véase Foucault (1977).

- Sobre la situación de los docentes cuando se debilita la legitimidad social del proyecto de enseñanza, véase Hofstadter (1963), pp. 309-316, y Prost (1968) pp. 132-136.

- Sobre la "renovación" de las cuatro operaciones de la aritmética por la introducción de los "operadores", véase Mercier (1978).

- Sobre los rendimientos comparados del algoritmo ordinario de multiplicación de los enteros y del algoritmo *per gelosia*, véase Brousseau *et al* (1973).

Capítulo 8

- Sobre las nociones de refundación y reelaboración en la historia de las ciencias, véase Bachelard (1934), pp. 175-177.

- Sobre la preocupación de la investigación educativa por el problema del tiempo, en una perspectiva que queda fijada en la fascinación por la dirección progresiva del tiempo didáctico legal, al que se trataría de adaptar al alumno mediante una "ortocronía" individualizada, véase Begin (1980).

- Sobre la noción piagetiana de *equilibración*, véase por ejemplo Droz y Rahmy (1974), pp. 45-52.

- Sobre la estructura del tiempo en Piaget —especialmente en contraste con la atmósfera temporal propia a la concepción bachelardiana de la historia de las ciencias— véase Piaget e Inhelder (1975), pp. 121-122.

- Sobre la concepción freudiana del *posterioridad*, véase Laplanche y Pontalis (1973), pp. 33-36; pp. 280-283 de la traducción al español.

- Sobre la noción de *preconstrucción* tal como se presenta en la teoría de los discursos, véase Pêcheux (1975), pp. 85-93.

- Sobre la noción de continuidad en Cauchy y sobre la confusión de las nociones de continuidad y derivabilidad, véase por ejemplo Delachet (1961), pp. 51-57.

- Sobre la noción de *aposición*, véase Maingueneau (1979), pp. 9-25.

- Sobre la preconstrucción de las nociones de polinomio y de número real en el primer ciclo de la enseñanza secundaria, véase Tonelle (1979), pp. 58-63.

Notas

Introducción. ¿Por qué la transposición didáctica?

1: Véase, por ejemplo, Conne (1981) En una perspectiva cercana; véase también Perret-Clermont *et al* (1982).

2: Véase Johsua (1982).

3: Althusser (1974), p.16.

4: Para la distinción entre sistema didáctico y sistema de enseñanza, véase más adelante (especialmente la figura 2).

5: Sobre este tema, véase, por ejemplo, Ballion (1982).

6: Pini (1981), p.24.

7: Storer (1959), p. 127.

8: *Ibid.*

Capítulo 4

1: Véase el Documento 1.

Capítulo 8

1: En este caso, expresión muy concreta, diferente a su uso metafórico ordinario.

2: Bourbaki (1969), p. 193.

3: A propósito de las funciones continuas que no admiten derivada.

Posfacio

1: Véase Freudenthal (1986).

2: *Ibid.*

3: Véase Chevallard (1990).

4: Sobre estas nociones y su empleo, véase Chevallard (1989c).

5: Sobre este tema, véase Chevallard y Mercier (1987).

6: Véase Chevallard (1989a).

7: Me refiero aquí y en lo que sigue al caso francés.

8: Véase Artaud (1989).

9: *Ibid.*

10: Véase Chevallard (1989b).

11: Título de la antología de textos de donde tomé las líneas precedentes.

12: Véase Chervel (1977) p. 76.

13: Véase el número 3 (1990) de la revista *Mesure* (editada por José Corti) dedicado a *La rhétorique aujourd'hui* y, en particular, la contribución de Vincenette Maigne (*loc. cit.* pp 99-112)

14: Véase Chevallard (1986)

Referencias bibliográficas

... después de reflexionar, les dije
que seguía tres procedimientos...
Primero: no leer nada del dominio
del cual uno se ocupa y sólo leer después.
Segundo método: la mayor cantidad posible en
los dominios vecinos...
Y tercer método: tener una cabeza de turco.

Jean Piaget

Algunas de las obras mencionadas o citadas en lo que precede no figuran en esta bibliografía, ya sea porque se trata de clásicos (Descartes, Cauchy), ya sea porque son manuales cuyas referencias aparecen en el texto principal.

Althusser, L. (1974) *Montesquieu, la politique et l'histoire*. Paris: PUF.

Althusser, L. (1976) *Positions*. Paris: Éditions sociales.

Artaud, M. (1989) *Conditions, contraintes et discours apologétique dans l'emergence de l'enseignement des mathématiques à l'âge classique– Étude de didactique historique, mémoire* *pour le DEA de didactique des sciences.* Lyon: Université Claude Bernard.

Bachelard, G. (1934) *Le Nouvel Esprit scientifique.* París: PUF, 1975. Hay traducción al español. *La formación del espíritu científico.* México, Siglo XXI, 1978.

Ballion, R. (1982) *Les consommateurs d'école.* París: Stock/Laurence Pernoud.

Barbut, M. (1962) Distances. *Bulletin de l'APM.* Octubre 1962, 23-30.

Begin, Y. (1980) "Du concept d'aptitude au concept de prérequis". *Bulletin de l'AMQ*, XX, 1, 3-7.

Bernkopf, M. (1966) "The development of Function Spaces". *Arch. Hist. Exact. Sci.*, 3, 1-96.

Blanché, R. (1970) *La logique et son histoire.* París: Armand Colin.

Boesch, M. (1926) *Géométrie du Brevet Élémentaire.* París: Bloud & Gay.

Bourbaki, N. (1969) *Éléments d'histoire des mathématiques.* París: Hermann. Hay traducción al español. *Elementos de historia de las matemáticas.* Madrid, Alianza Universidad, 1972.

Bourdieu, P. (1980) *Le sens pratique.* París: Éditions de Minuit.

Bourdieu, P., Chamboredon, J. C., Passeron, J. C. (1973) *Le métier de sociologue.* París: Mouton. Hay traducción al español.

Brousseau, G., Salin, M. H., Erreca, J., Massie, C., Peres, J. (1973) "Études sur l'apprentissage des algorithmes", *Enseignement élémentaire des mathématiques*, 13, IREM de Bordeaux.

Bush, L. P. (1979) "Placeholders: Formula vs. Form". *The Mathematics Teachers*, 72, 7, 517-518.

Cayley, A. (1858) "A Memoir on the Theory of Matrices". *Collected Mathematical Papers*, 2, 475-496.

Chenevier, P. (1927) *Géométrie plane classe de 2e.* París: Hachette.

Chervel, A. (1977) *Histoire de la grammaire.* París: Payot.

Chevallard, Y. (1977) *Deux études mathématiques sur la parenté.* París: Cedic.

Chevallard, Y. (1978). *Sur la transposition didactique dans l'enseignement de la statistique.* IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1979a) *Sur les difficultés "protomathématiques"*, contribución al coloquio "Apports de l'histoire des mathématiques à l'enseignement et à la formation des enseignants" (Puyricard, 18-19 mayo 1979) IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1979b) *Statut et fonctions de la notion de paramètre.* IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1980a) *La transposition didactique.* Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.

Chevallard, Y. (1980b) "Mathématiques, langage, enseignement: la réforme des années soixante". *Recherches*, 41, 71-99.

Chevallard, Y. (1986) *Esquisse d'une théorie formelle du didactique.* En: C. Laborde (Comp.). "Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique" (CIRM, Marseille, 16-21 noviembre 1986). Grenoble: 1988, 97-106. La Pensée Sauvage (avec le concours du Centre National des Lettres).

Chevallard, Y. (1989a). *Pourquoi enseigne-t-on les mathématiques?* Actes du colloque "Finalités des enseignements scientifiques" (Marseille, 10-12 enero 1989), CCSTI et Groupe de didactique de la physique de Marseille, Marsella, s.d., 41-45.

Chevallard, Y. (1989b) Enseignement des mathématiques et besoins professionnels— Le cas des élèves-instituteurs, Actes du XVI colloque inter-IREM des PEN et autres formateurs d'instituteurs en mathématiques (École normale de la Gironde, 18-20 mayo 1989), IREM de Bordeaux, s.d., 131-177.

Chevallard, Y. (1989c) *Le concept de rapport au savoir– Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel.* Actes du Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, año 1988-1989, Grenoble, LSD-IMAG et Institut Fourier, 211-235.

Chevallard, Y. (1990) *Sur la déconcertation cognitive,* Comunicación al coloquio del COED (Marsella, 3 de mayo de 1990), à paraître.

Chevallard, Y. y Johsua, M. A. (1982) "Un exemple d'analyse de la transposition didactique– La notion de distance". *Recherches en didactique des mathématiques,* 3.2., 157-239.

Chevallard, Y. y Mercier, A. (1987) *Sur la formation historique du temps didactique.* Marsella: Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, 8.

Choquet, G. (1964) *L'enseignement de la géométrie.* París: Hermann.

Choquet, G. (1965) Sur l'enseignement de la geómetrie élémentaire, *L'enseignement des mathématiques,* 1, Delachaux et Niestlé, 75-129.

Conne, F. (1981) *La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième années de l'école primaire.* Ginebra: Facultad de Psicología y de Ciencias de la Educación.

De Coppet, D. (1974) Race. *Encyclopaedia Universalis,* 13, 909-912.

Delachet, A. (1961) *L'analyse mathématique.* París: PUF.

Destouches, J. L. (1956) *La mécanique des solides.* París: PUF.

Dhombres, J. (1978) *Nombre, mesure et continu.* París: Cedic/Nathan.

Dieudonne, J. (1964) *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire.* París: Hermann.

Dixmier, J. (1957) "Étude de certains espaces de fonctions et de différents modes de convergence". *Bulletin de l'APM,* marzo 1957, 241-247.

Doneddu (1965) "Reconstruction ou enterrement". *Bulletin de l'APM,* marzo 1965, 273-275.

Droz, R. y Rahmy, M. (1974) *Lire Piaget.* Bruselas: Charles Dessart.

Eco, U. (1965) *L'oeuvre ouverte.* Le Seuil, coll. París: Points, 1979.

Foucault, M. (1977) "Vérité et pouvoir, entretien avec M. Fontana", *L'Arc,* 70, 21-22.

Fréchet, M. (1906) "Sur quelques points du calcul fonctionnel". *Rend. Circ. Matem. Palermo,* XXII, 1-74.

Fréchet, M. (1928) *Les espaces abstraits.* París: Gauthier-Villars.

Fréchet, M. (1955) *Les mathématiques et le concret.* París: PUF.

Fréchet, M. (1966) "Une lettre de M. Fréchet". *Bulletin de l'APM,* julio-agosto 1966, 439.

Freud, S. (1933) *Essais de psychanalyse appliquée.* París: Gallimard, 1976.

Freudenthal, H. (1973) *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1986) Book Reviews, *Educational Studies in Mathematics,* 17, 3, 323-327.

Glaeser, G. (1971) *Mathématiques pour l'élève professeur.* París: Hermann.

Guillaumin, C. (1972) *L'idéologie raciste.* París-La Haye.

Hofstadter, S. (1963) *Anti-intellectualism in American Life.* Nueva York: Vintage Books.

Hue et Vagnier. *Géométrie*. París: Delagrave.

Izorche, M. L. (1977) *Les réels en classe de seconde*. IREM de Bordeaux.

Jacquard, A. (1973) "Distances généalogiques et distances génétiques". *Cahiers d'anthropologie et d'écologie humaine*. París: Hermann.

Jacquard, A. (1974) *The Genetic Structure of Populations*. Berlín: Springer.

Jacquard, A. (1978) *Eloge de la différence*. París: Seuil.

Johsua, S. (1982) *L'utilisation du schéma en électrocinétique: aspects perceptifs et aspects conceptuels. Propositions pour l'introduction de la notion de potentiel en électrocinétique*. Marsella: Facultad de Ciencias de Luminy.

Karsz, S. (1974) *Théorie et politique: Louis Althusser*. París: Fayard.

Laplanche, J. y Pontalis, J. B. (1973) *Vocabulaire de la psychanalyse*. París: PUF. Traducción al español, *Diccionario de Psicoanálisis*. Barcelona, Paidós, 1996.

Lebesgue, H. (1932) *La mesure des grandeurs*. París: Albert Blanchard, 1975.

Leclerc, G. (1979) *L'observation de l'homme*. París: Seuil.

Le Moigne, J. L. (1977) *La théorie du système général*. París: PUF.

Lerman, I. C. (1982) *Classification et analyse ordinale des données*. París: Dunod.

Levy, P. *et al.* (1967) "La vie et l'oeuvre de Jacques Hadamard". *L'enseignement mathématique*, 16, Ginebra.

Levy, P. (1970) *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*. París: Albert Blanchard.

Longeon, C. (1989) *Premiers combats pour la langue française*, introduction, choix et notes de Claude Longeon, Le Livre de poche. París: Librairie générale française.

Lourau, R. (1969) *L'illusion pédagogique*. París: Epi.

Maigne, V. (1990) *La rhétorique: scientia, ars, virtus. Mesure*, 3, 99, 112.

Maingueneau, D. (1979) *Les livres d'école de la république 1870-1914*. París: Le Sycomore.

Mercier, A. (1978) *Étude des notions "opérateur" "machine"*. IREM de Bordeaux e IREM d'Aix-Marseille.

Mesnard, P. (1966) *Descartes*. París: Seghers.

Ministère de l'Education Nationale (1972). *Mathématiques (classes du 1er. cycle), horaires, programmes, instructions*. INRDP, París.

Ministère de l'Education Nationale (1980). *Mathématiques, classes des collèges 6e, 5e, 4e, 3e*. CNDP, París.

NTCM (1980) *An Agenda for Action. Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. Reston (Virginia).

Pair, C. (1960) "Géométrie affine en classe de seconde". *Bulletin de l'APM*, diciembre 1960, 271-275.

Pêcheux, M. (1975) *Les vérités de La Palice*. París: François Maspéro.

Pellos, F. (1942) *Compendion de l'abaco, édition de la Revue des langues romanes*. 1967, Montpellier.

Perret-Clermont, A. N., Brun, J., Conne, F., Schubauer-Leoni, M. L. (1982) *Décontextualisation et recontextualisation du savoir dans l'enseignement des mathématiques à de jeunes élèves*. Ginebra: Facultad de Psicología y de Ciencias de la Educación.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1975) *La psychologie de l'enfant*. París: PUF. Traducción al español: *Psicología del niño*. Madrid: Morata, 1972.

Pini, G. (1981) "Pour une définition de la recherche-action". *Cahiers de la Section des Sciences de l'Education*, 26, Facultad de Psicología y de Ciencias de la Educación, Ginebra, 11-31.

Prost, A. (1968) *L'enseignement en France*, 1800-1967. París: Armand Colin.

Reuchlin, M. (1977) *Psychologie*. París: PUF.

Revuz, A. (1957) "Espaces euclidiens et espaces métriques". *Bulletin de l'APM*, enero 1957, 176-184.

Revuz, A. y Revuz, G. (1966) *Éléments de topologie*. París: APM.

Schneider, O. (1979) *Le passage des équations numériques aux équations paramétriques en classe de seconde*. IREM de Bordeaux e IREM d'Aix-Marseille.

Storer (1959) "Symbolisme et règles opératoires dans les mathématiques scolaires", résumé dû à Mlle Félix d'une conférence faite au Congrès international d'Edimbourg. *Bulletin de l'APM*, 196, 126-128.

Tonnelle, J. (1979) *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*. IREM de Bordeaux e IREM d'Aix-Marseille.

Troelstra, A. S. (1969) *Principles of Intuitionism*. Berlín: Springer-Verlag.

Vergnaud, G., Rouchier, A., Ricco, G., Marthe, P., Metregiste, R., Giacobbe, J. (1979) *Acquisition des "structures multiplicatives"*. IREM d'Orléans y Centre d'étude des processus cognitifs et du langage, París: EHESS-CNRS.

Verret, M. (1975) *Le temps des études*, 2 volúmenes. París: Librairie Honoré Champion.

Wittgenstein, L. (1976) *De la certitude*. París: Gallimard.

Esta edición de 1.000 ejemplares
se terminó de imprimir en octubre de 2000
en La Prensa Médica S.R.L.
Junín 845, Buenos Aires